

Azərbaycan Texniki Universitetinin nəzdində

Bakı Texniki Kolleci

“Ümumitəhsil fənlər” fənn birliyi

“Riyaziyyat” fənnindən I smestr üçün

MÜHAZİRƏLƏR

2022

Mündəricat

1.Funksiyalar.

Funksiyalar və onun verilmə üsulları, onların təyin və qiymətlər çoxluğu -----	4
Funksiyaların xassələri. Cüt və tək funksiya .Hissə-hissə verilmiş funksiya-----	7
$Y=x^n$ qüvvət funksiyaları. Funksiyaların təsnifatı. Qrafiklərin çevrilməsi -----	11
Funksiya üzərində əməllər. Mürəkkəb və tərs funksiyalar.-----	12

2. Fəzada nöqtə ,düz xətt ,müstəvi.

Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi. Fəzada düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti-----	14
Düz xətlə müstəvinin paralelliyi və düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı.-----	15
Üç perpendikulyar teoremi-----	16
İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar-----	17
Perpendikulyar və paralel müstəvilər. Proyeksiyalar-----	17

3. İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları.

Dönmə bucaqları. Bucağın radian və dərəcə ölçüsü -----	19
Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi. Xətti və bucaq sürəti -----	20
Triqonometrik funksiyalar. İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları .Vahid çevrə-----	21
Çevirmə düsturları .Triqonometrik eynilliklər-----	22
Toplama düsturları və alınan nəticələr-----	23

4. Sinuslar və kosinuslar teoremi

Sinuslar teoremi və üçbucağın sahəsi-----	25
kosinuslar teoremi-----	25

5. Triqonometrik funksiyalar

Dövrü funksiyalar. $y = \sin x$ və $y = a \sin b x$ funksiyası və onların çevrilmələri, funksiyanın dövrü və amplitudu	26
$y = \cos x$ və $y = a \cos b x$ funksiyası və onların çevrilmələri, funksiyanın dövrü və amplitudu	26
$y = \operatorname{tg} x$ və $y = a \operatorname{tg} b x$ funksiyası və qrafiki	27
$y = \operatorname{ctg} x$ və $y = a \operatorname{ctg} b x$ funksiyası və qrafiki	28
Tərs triqonometrik funksiyalar. (Arcsinus, arccosinus, arctangens və arccotangens anlayışları).	28

6. Çoxüzlülər.

Çoxüzlülər. Prizmalar onların müxtəlif görünüşləri. Prizmanın səthinin sahəsi. Onun müstəvi kəsikləri	34
Piramida onun yan və tam səthinin sahəsi. Kəsik piramida	35

7. Trigonometrik tənliklər və bərabərsizliklər.

Sadə trigonometrik tənliklər və bərabərsizliklər	37
Sadə trigonometrik bərabərsizliklər	38

8. Sinuslar və kosinuslar teore .

Prizma və piramidanın həcmi	39
Fəza fiqurlarının oxşarlığı. Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmiləri	39
Kəsik piramidanın həcmi	40

9. Üstlü və loqarifmik funksiyalar

Həqiqi üstlü qüvvət üstlü funksiya və onun qrafik çevrilmələri. e ədədi	41
Ədədin loqarifmasının tərfi. Hasilin, nisbət, qüvvətin loqarifması. Loqarifmik funksiya, onun xassələri və qrafiki. Üstlü funksiyanın qrafiki. Üstlü və loqarifmik tənliklərin həlli	42
Üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər	43

10. Kompleks ədədlər

Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər	44
Kompleks ədədin həndəsi təsviri, kompleks ədədin modulu və argumenti, kompleks ədədin Trigonometrik şəkli	44

I. FUNKSIYALAR

Funksiyalar və onun verilmə üsulları. Onun təyin və qiymətlər oblastı

X kəmiyyətinin hər bir qiymətinə y kəmiyyətinin müəyyən qiyməti uyğun olarsa, y kəmiyyətinin x asılılığına funksional asılılıq deyilir.

Tutaq ki, X ədədi çoxluqdur.

Məsələn, $X = [-4; 5]$, $X = (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ və s. ola bilər.

Tərif: x ədədi çoxluğundan götürülmüş hər bir x-ə Y çoxluğundan yeganə y ədədini qarşı qoyan qaydaya X çoxluğunda verilmiş ədədi funksita deyilir.

x-ə sərbəst dəyişən və ya funksiyanın arqumenti, y-ə asılı dəyişən və ya x arqumentinin funksiyası deyilir.

Adətən, ədədi funksiya $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ və s. kimi işarə olunur.

X çoxluğu funksiyanın təyin oblastı adlanır və $D(f)$ ilə işarə olunur:

$$D(f)=X.$$

$f(x)$ çoxluğu funksiyanın qiymətlər çoxluğu və ya qiymətlər oblastı adlanır və $E(f)$ ilə işarə olunur.

Misal 1: $f(x)=\frac{1}{x}$ düsturunun bütün $x \neq 0$ üçün mənası vardır. Ona görə $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasının təyin oblastı sıfırdan fərqli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Onun qiymətlər oblastı təyin oblastı ilə üst-üstə düşür və $(-\infty; 0)$ və $(0; \infty)$ intervalların birləşməsindən ibarətdir. Yəni $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyası üçün $D(f)=E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ olur.

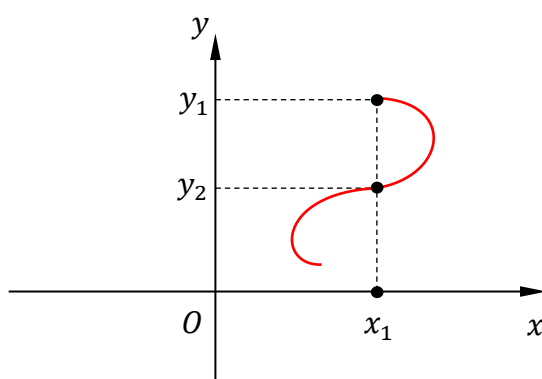
Misal 2: $f(x)=x^2$ funksiyası R həqiqi ədədlər çoxluğuna təyin olunmuşdur. Bu çoxluqdan götürülmüş hər bir x-ə mənfi olmayan x^2 ədədi qarşı qoyulur. Yəni $D(f)=(-\infty; +\infty)$ onun təbii təyin oblastıdır və $E(f)=[0; +\infty)$.

Koordinat müstəvisində absisləri arqumentin qiymətlərinə, ordinatları isə funksiyanın uyğun qiymətlərinə bərabər olan nöqtələr çoxluğuna funksiyanın grafiki deyilir.

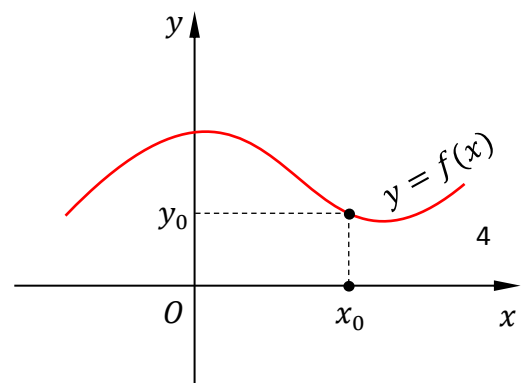
Başqa sözlə, $y=f(x)$ ədədi funksiyasının grafiki koordinat müstəvisində $\{M(x; f(x)); |x \in D(f)\}$ nöqtələr çoxluğuna deyilir.

Şəkil 1 –də təsvir edilmiş əyri funksiya grafiki deyil, şəkil 2- də isə funksiya grafiki təsvir olunmuşdur.

Şəkil1.



Şəkil2.



2.Funksiyanın verilmə üsulları (Analitik üsul , Cədvəl üsulu və Qrafik üsul)

Funksiya üç üsulla verilir.

1.Cədvəl üsulu :

Sərbəst dəyişən $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qiymətlərinə uyğun asılı dəyişən $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$

Qiymətləri cədvəl vasitəsilə verilir

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2		...	y_n

2.Qrafik üsul:

X və Y arasında asılılıq koordinat müstəvisində müəyyən əyri ilə verilir. X-in hər bir qiymətində Y-in qiyməti tapılır.

3. Analitik üsul. X və Y arasındakı asılılıq müəyyən düsturla verilir. $Y=f(x)$

Məs: $y=\frac{1}{2}x$, $y=\sqrt{x}$ və s.

Misal 1. $f(x)=\frac{7}{x-2}$ funksiyasının təyin oblastını tapmaq.

Həlli. $x-2 \neq 0$, yəni $x \neq 2$ olduqda $\frac{7}{x-2}$ ifadəsinin mənası vardır. Ona görə də $f(x)=\frac{7}{x-2}$

funksiyasının təyin oblastı 2-dən başqa bütün həqiqi ədədlər çoxluğu. Bu çoxluq aralıq şəklində belə yazılır:

$$D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$$

Misal 2. $f(x)=\sqrt{2x-3}$ funksiyasının təyin oblastını tapmaq.

Həlli. Məlumdur ki, yalnız $2x-3 \geq 0$ olduqda $\sqrt{2x-3}$ ifadəsinin mənası var. Bərabərsizliyi həll etsək $x \geq 1,5$ alırıq. Deməli, verilmiş funksiyanın təyin oblastı

$$D(f)=[1,5; +\infty).$$

Misal 3. $y=3\sqrt{x-2}+1$ funksiyanın qiymətlər çoxluğunu tapmaq.

Həlli. $y=3\sqrt{x-2}+1$ düsturundan $\sqrt{x-2}=\frac{y-1}{3}$ alırıq. Burada $\sqrt{x-2} \geq 0$ olduğunu nəzərə alsaq, $\frac{y-1}{3} \geq 0$ alınır. Burada isə $y \geq 1$. Deməli, $E(f)=[1; +\infty)$. $y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ düsturunun sağ tərəfini həmişə $a(x-m)^2+n$ (burada $m=-\frac{b}{2a}$, $n=\frac{b^2-4ac}{4a}$) şəklində yazmaq olar: $y=a(x-m)^2+n$.

$a > 0$ olduqda, $y=a(x-m)^2+n$ funksiyanın qiymətlər oblastı $[n; +\infty)$, $a < 0$ olduqda isə bu funksiyanın qiymətlər oblastı $(-\infty; n]$ aralığı olur. Bundan istifadə edərək funksiyaların qiymətlər oblastını tapmaq olur.

Misal 4. $y=2x^2-5x+3$ funksiyanın qiymətlər oblastını tapmaq.

Həlli. $y=2x^2-5x+3$ olduqda $a=2 > 0$ və $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{25-4*2*3}{4*2}=-\frac{1}{8}$.

Deməli, verilmiş funksiyanın qiymətlər oblastı $[-\frac{1}{8}; +\infty)$ çoxluğudur: $E(f)=[-\frac{1}{8}; +\infty)$.

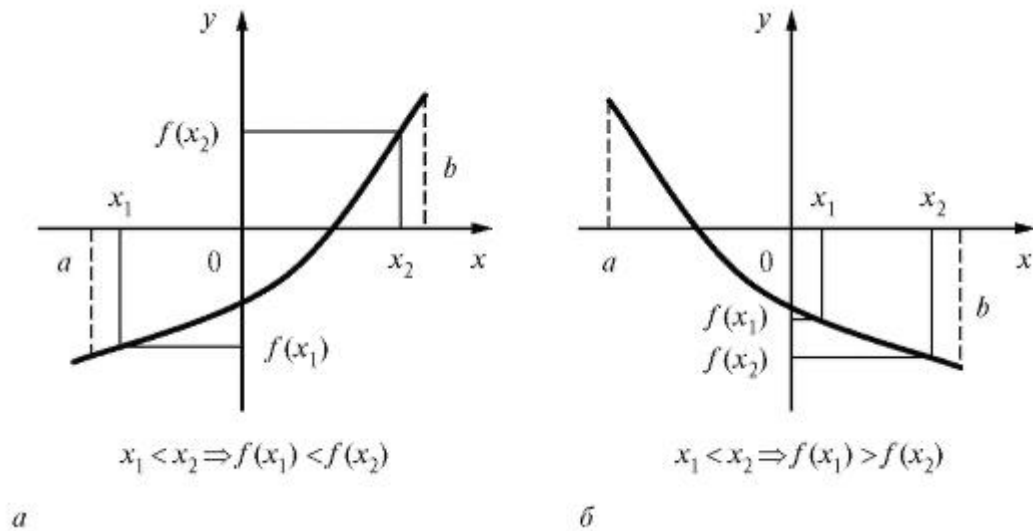
Funksiyaların xassələri. Cüt və tək funksiya. Hissə-hissə verilmiş funksiya

X çoxluğunda argumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğun gələrsə, f funksiyasına bu çoxluqda **artan funksiya** deyilir.

Başqa sözlə, istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda, $f(x_1) < f(x_2)$ olarsa, f funksiyasına X çoxluğunda artan funksiya deyilir.

X çoxluğunda argumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğun gələrsə, f funksiyasına bu çoxluqda **azalan funksiya** deyilir.

Başqa sözlə, istənilən $x_1, x_2 \in X$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda, $f(x_1) > f(x_2)$ olarsa, f funksiyasına X çoxluğunda azalan funksiya deyilir.

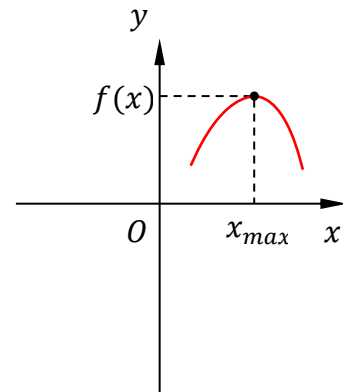
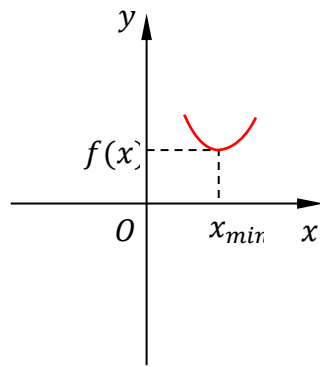


Artan və azalan funksiylərə **monoton** funksiylər, azalmayan və artmayan funksiylərə qeyriiddi monoton funksiylər deyilir.

Tərif 1. x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafından götürülən x -lər üçün $f(x) \geq f(x_0)$ bərabərliyi ödənərsə x_0 — f funksiyanın minimum nöqtəsi deyilir.

Tərif 2. x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafından götürülən x -lər üçün $f(x) \leq f(x_0)$ bərabərliyi ödənərsə

$x_0 - a$ f funksiyasının maksimum nöqtəsi deyildir.



Maksimum və minimum nöqtələri ekstremum nöqtələri, funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri isə funksiyanın ekstremum qiymətləri adlanır.

f(x) funksiyasının $[a; b]$ parçasında aldığı qiymətlərin ən böyüyünə bu parçada onun ən böyük qiyməti (ƏBQ) deyilir və $\max f(x), x \in [a; b]$ kimi işarə olunur.

$f(x)$ funksiyasının $[a; b]$ parçasında aldığı qiymətlərin ən kiçiyinə bu parçada onun ən kiçik qiyməti (ƏKQ) deyilir və $\min f(x), x \in [a; b]$ kimi işarə olunur.

Məsələ1. $y=x^2+2x-3$ funksiyasının artma və azalma aralıqlarını tapın.

Həlli. Verilən funksiyanın təpə nöqtənin absisini tapaq.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1.$$

$a = 1 > 0$ olduqda $y=x^2+2x-3$ kvadratik funksiyası $(-\infty; -1]$ aralığında azalır, $[-1; \infty)$ aralığında artır.

Məsələ 2. $y=(x+3)^2-1$ funksiyasının ən kiçik qiymətini tapın.

Həlli. Verilən funksiyanın təpə nöqtənin koordinatları: $(-3; -1)$ olduqda, funksiyanın ən kiçik

qiyməti $y_{\min} = -1$.

Məsələ 3. $y = x^2 - x - 2$ funksiyasının $[-2; 5]$ parçada funksiyanın ƏKQ və ƏBQ-ni tapaq.

Həlli. $y = x^2 - x - 2$ kvadratik funksiyasında $a = 1 > 0$ olduğundan, minimumu var və minimum nöqtəsi $m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \in [-2; 5]$.

Bu funksiyanın minimumu isə $n = \frac{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ -ə bərabərdir.

Başqa sözlə, $y_{\min} = f(\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{2}$.

Parçanın uc nöqtələrindəki $f(-2)$ və $f(5)$ qiymətləri isə uyğun olaraq $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$,

$f(5) = 5^2 - 5 - 2 = 18$ olar.

Bu qiymətlər qçərisində, göründüyü kimi, funksiyanın ƏBQ-i 18-ə, ƏKQ isə $-2\frac{1}{4}$

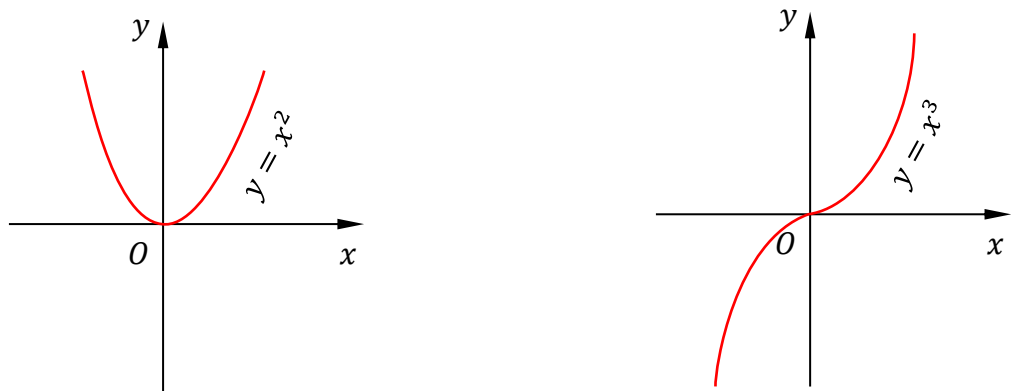
Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik oblastda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası x -in həmin oblastdakı bütün qiymətlərində $f(-x) = f(x)$ şərti ödənərsə ona cüt funksiya,

$f(-x) = -f(x)$ şərti ödənərsə ona tək funksiya deyilir.

Cüt funksiyanın qrafiki ordinant oxuna nəzərən simmetrikdir.

Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Şəkil:

Şəkil.3



Cüt və Tək funksiyalar haqqında :

Qayda 1.iki cüt funksiyanın cəmi və fərqi ,hasili və nisbəti cüt funksiyaadır.

Qayda 2. iki tək funksiyanın cəmi və fərqi tək funksiyaadır.

Qayda 3. iki tək funksiyanın ,hasili və qisməti cüt funksiyaadır.Burada bölən funksiya $\neq 0$ olur.

Qayda 4.Tək funksiya ilə cüt funksiyanın cəmi və fərqi nə tək , nə də cüt funksiyaadır.

Qayda 5.Tək funksiya ilə cüt funksiyanın hasili və qisməti tək funksiyaadır.

Misal 1. $f(x)=|x|+1$; $f(x)=\frac{1}{x^2} - \cos x$; $f(x)=|x|\cos x$; $f(x)=\frac{|x|}{1+\cos x}$ ----cüt funksiyalardır.

2. $f(x)=x^3 + \sin x$; $f(x)=\frac{1}{x} - x$ ---- tək funksiyalardır.

3. $f(x)=x^3 \cdot \sin x$; $f(x)=x \cdot x^3$ ----cüt funksiyalardır.

4. $f(x)=x^2 \cdot \sin x$; $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$, $x^2 \neq 0$ ---- tək funksiyalardır.

Təyin oblastının müxtəlif aralıqlarında müxtəlif düsturlarla verilən funksiyalara **hissə-hissə verilmiş funksiyalar** deyilir.

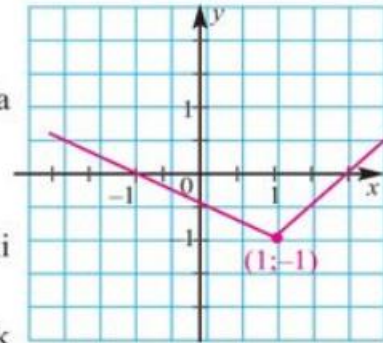
Nümunə 1. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x < 1 \text{ olduqda} \\ x - 2, & x \geq 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

Həlli: Bu funksiyanın qrafiki $x = 1$ nöqtəsindən solda $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ düz xəttinin, $x = 1$ -dən sağda isə $y = x - 2$ düz xəttinin üzərinə düşür.

$f(1) = -1$ olduğuna görə verilən funksiyanın qrafiki təpəsi $(1; -1)$ nöqtəsində olan sınıq xətdir.

Qələmi “vərəqdən ayırmadan” qrafiki təsvir etmək olursa, funksiya kəsilməzdir deyilir. Nümunədə verilən funksiya kəsilməzdir.



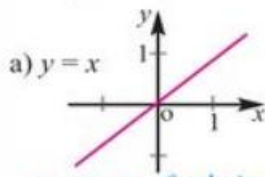
$Y=x^n$ qüvvət funksiyaları.

Funksiyaların təsnifatı.

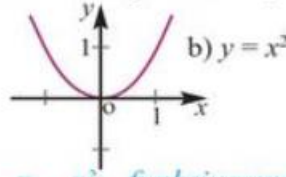
Qrafiklərin çevrilməsi.

n natural ədəd olduqda $y=x^n$ şəklində funksiya natural üstlü qüvvət funksiyası deyilir.

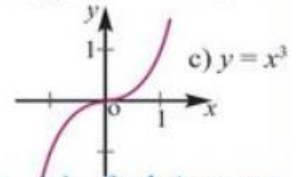
$n=1, n=2, n=3$ olduqda qüvvət funksiyalarının qrafikləri aşağıda verilmişdir.



$y=x$ funksiyasının qrafiki düz xətdir.



$y=x^2$ funksiyasının qrafiki paraboladır.



$y=x^3$ funksiyasının qrafiki kub paraboladır.

$y=x^n$ funksiyasının qrafiki n -in istənilən cüt qiymətində ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir və $y=x^2$ parabolasına oxşardır.

n -in istənilən tək qiymətində $y=x^n$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir və n -in 1-dən böyük tək qiymətlərində $y=x^3$ -nün qrafiki olan kub parabolaya oxşardır.

$$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$$

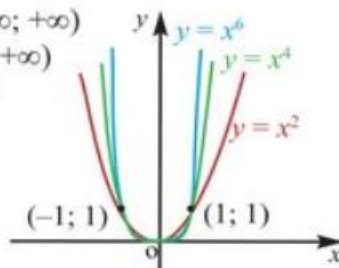
$$\text{Sıfırı: } x=0$$

$$(-\infty; 0] \searrow$$

$$[0; +\infty) \nearrow$$

$$x_{\min}=0;$$

$$f_{\min}=0$$



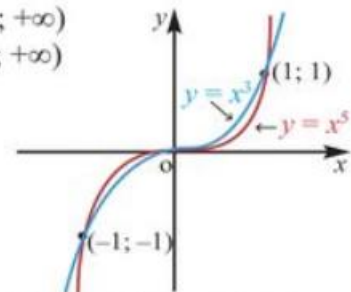
$$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$$

$$\text{Sıfırı: } x=0$$

$$(-\infty; +\infty) \nearrow$$

$$\text{ekstremumu yoxdur}$$



$n > 1, n \in N$ olduqda x^n funksiyasının qrafiki **n tərtibli parabola** adlanır.

Qrafiklərdən görüldüyü kimi, $n > m$ olduqda $(0; 1)$ aralığında x^n funksiyasının qrafiki x^m funksiyasının qrafikindən aşağıda, $(1; +\infty)$ aralığında isə yuxarıda verəlsir.

Paralel köçürmədə qrafikin bütün nöqtələri verilən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişir. Qrafikin forması isə dəyişmir.

$y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə hər bir nöqtəsinə $\langle m; n \rangle$ vektoru ilə paralel köçürək: $A(a; b) \rightarrow A_1(a + m; b + n)$

A nöqtəsinin koordinatları $b = f(a)$ bərabərliyini

ödədikdə A_1 nöqtəsinin koordinatları $y - n = f(x - m)$

bərabərliyini ödəyir. Yəni $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini $\langle m; n \rangle$ vektoru ilə paralel köçürdükdə

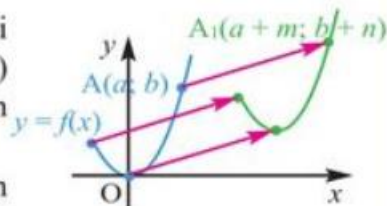
$y = f(x - m) + n$ funksiyasının qrafiki alınır: verilən

qrafik üfüqi istiqamətdə $|m|$ vahid ($m > 0$ olduqda

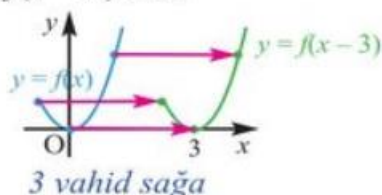
sağa, $m < 0$ olduqda sola), şaquli istiqamətdə $|n|$ vahid ($n > 0$ olduqda yuxarı,

$n < 0$ olduqda aşağı) sürüşdürülür.

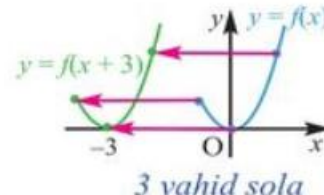
$n = 0$ halında qrafik yalnız üfüqi istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x - m)$ olur.



Nümunə.



3 vahid sağa



3 vahid sola

$m = 0$ halında qrafik yalnız şaquli istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x) + n$ olur.

Funksiya üzərində əməllər. Mürəkkəb və tərs funksiyalar.

Verilən funksiyalar üzərində hesab əməlləri aparmaqla yeni funksiya almaq olar. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üzərində aparılmış toplama, çıxma, vurma əməlləri nəticəsində alınan funksiyanın təyin oblastı bu funksiyaların hər ikisinin təyin olunduğu həqiqi ədədlər çoxluğudur. Başqa sözlə, yeni funksiyanın təyin oblastı $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsidir: $D = D(f) \cap D(g)$. Funksiyaların nisbəti isə argumentin D çoxluğundan olan və məxrəcdəki funksiyanı sıfırdan fərqli edən qiymətləri üçün təyin edilir. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş istənilən funksiya olarsa, onlar üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə əməlləri aşağıdakı qayda ilə yerinə yetirilir.

Əməl	Riyazi yazılış	Nümunə $f(x) = x + 5$ və $g(x) = 3x$
Toplama	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 5) + 3x = 4x + 5$
Çıxma	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 5) - 3x = -2x + 5$
Vurma	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(x + 5) \cdot 3x = 3x^2 + 15x$
Bölmə	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{x + 5}{3x}$

1) İki cüt funksiyanın cəmi cüt, iki tək funksiyanın cəmi tək funksiya.

2) İki cüt funksiyanın və iki tək funksiyanın hasili (nisbəti) cüt funksiya, cüt funksiya ilə tək funksiyanın hasili (nisbəti) tək funksiya.

Başqa sözlə, x -in müxtəlif qiymətlərinə y -in müxtəlif qiymətləri uyğun olarsa, $y = f(x)$ funksiyasının tərsi var.

Monoton funksiyalar üçün $x_1 \neq x_2$ olduqda $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan alırıq:

1) Təyin oblastında artan funksiyanın tərsi var.

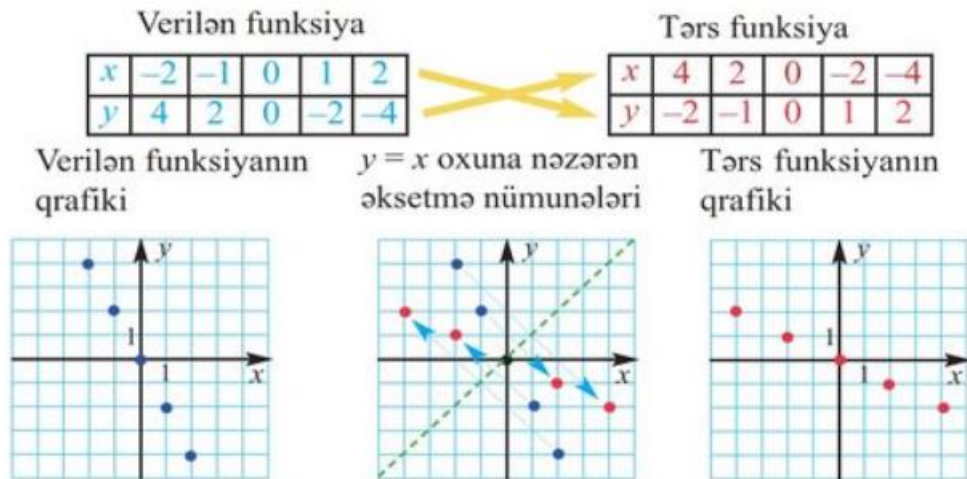
2) Təyin oblastında azalan funksiyanın tərsi var.

Tutaq ki, $y = f(x)$ tərsi olan funksiya, yəni $y = f(x)$ münasibətindən x -i y vasitəsilə birqiymətli ifadə edərək, $x = f^{-1}(y)$ kimi yazmaq mümkündür. Onda $x = f^{-1}(y)$ funksiyasına $y = f(x)$ funksiyasının tərs funksiyası deyilir.

Adətən, argumenti x ilə, funksiyanı y ilə işarə edirlər. Ona görə də $y = f(x)$ -in tərs funksiyasını $y = f^{-1}(x)$ şəklində yazırlar. Əgər f^{-1} funksiyası f -in tərs funksiyasıdırsa, onda f funksiyası da f^{-1} -in tərs funksiyası olur. Yəni, f və f^{-1} qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri.

$(a; b)$ nöqtəsi verilən funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, $y = x$ düz xəttinə nəzərən bu nöqtəyə simmetrik olan $(b; a)$ nöqtəsi tərs funksiyanın qrafiki üzərində olacaq.



Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

II Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi.

Fəzada düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti.

Həndəsənin fəza fiqurlarını öyrənən bölməsi Stereometriya adlanır.

Stereometriyada üç anlayış: nöqtə, düz xətt və müstəvi tərifsiq qəbul olunur.

Bu anlayışlara əsas anlayışlar deyilir.

Aksiom 1: Fəzada düz xətlər və müstəvilər var. Hər bir düz xəttə və hər bir müstəviyə aid olan və aid olmayan nöqtələr var.

Aksiom 2: Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Aksiom 3: Planimetriyanın Bütün aksiomları və teoremləri fəzanın hər bir müstəvisində doğrudur.

Aksiom 4: İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər.

Aksiom 5: Fəzada hər bir müstəvi fəzanın bu müstəviyə aid olmayan nöqtələrini aşağıdakı şərti ödəyən iki çoxluğa ayırır:

- a) Eyni çoxluğa aid olan ixtiyari iki nöqtəni birləşdirən parça bu müstəvinin kəsmir,
- b) Müxtəlif çoxluqlara aid olan istənilən iki nöqtəni birləşdirən parça müstəvinin kəsir.

Nəticə 1: Düz xətlə müstəvinin iki ortaq nöqtəsi varsa, bu düz xətt müstəvi üzərindədir.

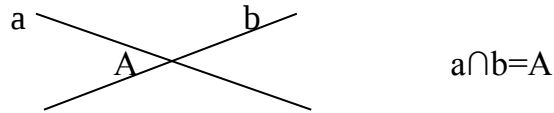
Nəticə 2: Düz xətt və ona aid olmayan nöqtədən bir yalnız bir müstəvi keçir.

Nəticə 3: İki kəsişən düz xətdən yalnız bir müstəvi keçir.

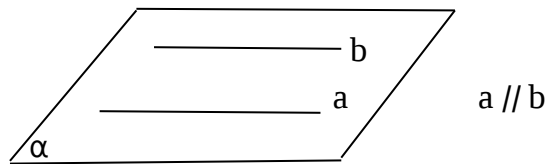
Düz xətlə müstəvinin paralelliyi və düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı.

Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti.

Fəzada yalnız bir ortaq nöqtəsi olan iki düz xəttə kəsişən düz xətlər deyilir.



Bir müstəvi üzərində olan və kəsişməyən iki düz xəttə paralel düz xətlər deyilir.



Teorem 1: Fəzada düz xətt xaricində götürülmüş nöqtədən həmin düz xəttə paralel yalnız bir düz xətt keçir.

Teorem 2: Eyni düz xəttə paralel olan iki düz xətt paraleldir.

Yalnız bir ortaq nöqtəsi olan düz xətt və müstəviyə kəsişən düz xətt və müstəvi deyilir.

Ortaq nöqtəsi olmayan düz xətt və müstəviyə paralel düz xətt və müstəvi deyilir.

Teorem 1: Müstəvi üzərində olmayan düz xətt, müstəvi üzərindəki hər hansı bir düz xəttə paraleldirsə, özünə də paraleldir.

Teorem 2: Bir müstəvi(β), ikinci müstəviyə (α) paralel olan düz xətdən (a) keçib onu kəsərsə,

alınan kəsişmə xətti (a) düz xəttinə paralel olar.

Bir müstəvi üzərində olmayan iki düz xəttə çarpaz düz xətlər deyilir.

Teorem 1: İki düz xətdən biri ikincidən keçən hər hansı bir müstəvini ikinci düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.

İki çarpaz düz xətt arasındakı bucaq, uyğun olaraq, onlara paralel olan iki kəsişən düz xətt arasındakı bucağa deyilir.

İki müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişir. Bu müstəvilər kəsişən müstəvilər adlanır.

İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi varsa, onlar üst-üstə eyni müstəvidirlər.

Ortaq nöqtəsi olmayan müstəvilərə paralel müstəvilər deyilir.

Teorem 2: Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti, uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, bu müstəvilər paraleldir.

Teorem 3: İki paralel müstəvini üçüncü müstəvi kəsərsə, kəsişmə xətləri paraleldir.

Teorem 4: Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.

Üç perpendikulyar teorem.

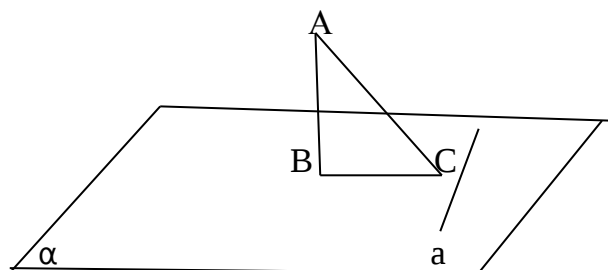
İki fiqur arasındakı məsafə onların nöqtələri arasındakı məsafələrin ən kiçiyinə deyilir.

Fəzada verilmiş nöqtə ilə müstəvi arasındakı məsafə həmin nöqtədən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.

İki paralel müstəvi arasındakı məsafə bu müstəvilərdən birinin ixtiyari nöqtəsindən o birinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.

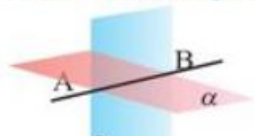
1. Üç perpendikulyar teorem.

Teorem 1: Müstəvi üzərində olan düz xətt, mailin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyasına perpendikulyardırsa, bu mailin özünədə perpendikulyardır. Tərsinə: Müstəvi üzərində olan düz xətt mailə perpendikulyardırsa, mailin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyasına da perpendikulyardır.



$BC \perp a$ onda $AC \perp a$ və $AC \perp a$ onda $BC \perp a$.

İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar.

Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri		
Paralel müstəvilər Paralel müstəvilərin heç bir ortaq nöqtəsi olmur.	Kəsişən müstəvilər İki müstəvi bir düz xətt üzrə kəşisir. α və β müstəviləri AB düz xətti üzrə kəşisir.	Üst-üstə düşən müstəvilər İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi vardır.
		

Ortaq sərhədləri olan iki yarım-müstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura **ikiüzlü bucaq** deyilir. Yarım-müstəvilər ikiüzlü bucağın üzləri, onların ortaq sərhədi isə ikiüzlü bucağın tili adlanır.

İki müstəvinin kəsişməsindən 4 ikiüzlü bucaq alınır.

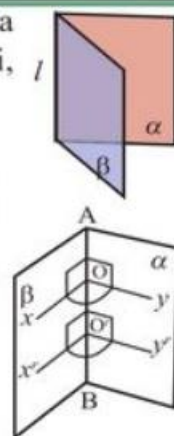
İkiüzlü bucağın tili üzərində hər hansı bir nöqtə götürüb, bu nöqtədən hər biri ayrı yarım-müstəvilərdə olan perpendikulyar şüalar çəksək, alınan bucaq ikiüzlü bucağın xətti bucağı adlanır.

İkiüzlü bucaq özünün xətti bucağı ilə ölçülür. Xətti bucağın dərəcə ölçüsü ikiüzlü bucağın dərəcə ölçüsünü göstərir.

İkiüzlü bucağın bütün xətti bucaqları paralel köçürmə ilə üst-üstə düşür, deməli, dərəcə ölçüləri bərabərdir (eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir).

Xətti bucağın qiyməti onun təpə nöqtəsinin vəziyyətindən asılı deyil.

İkiüzlü bucaqların ölçüləri 0° -dən 180° -yə qədər olur.



Perpendikulyar və paralel müstəvilər. Proyeksiyalar.

Fəzada düz bucaq əmələ gətirən iki düz xəttə perpendikulyar düz xətlər deyilir.

Fəzada düz xəttin xaricində götürülmüş nöqtədən onu kəsən bir perpendikulyar düz xətt, düz xəttin üzərindəki nöqtədən isə sonsuz sayda perpendikulyar düz xətt keçirmək olar.

Teorem 1: Paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan düz xətt onların hər birinə perpendikulyardır.

Müstəvi üzərindəki hər bir düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttə, müstəviyə perpendikulyar düz xətt, müstəviyə isə düz xəttə perpendikulyar müstəvi deyilir.

a düz xətti α müstəvisinə perpendikulyardırsa, $a \perp \alpha$.

Teorem 2: Müstəvinin kəsən düz xətt, onun üzərindəki iki kəsişən düz xəttə perpendikulyardırsa, müstəvinin özünədə perpendikulyardır.

Teorem 3: Fəzanın ixtiyari nöqtəsindən verilmiş müstəviyə perpendikulyar bir və yalnız bir düz xətt keçirmək olar.

Nəticə: Paralel müstəvilərdən birinə perpendikulyar olan düz xətt, o birinə də perpendikulyardır.

III. İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları.

Dönmə bucaqları. Bucağın radian və dərəcə ölçüsü

Bucağın radian ölçüsü

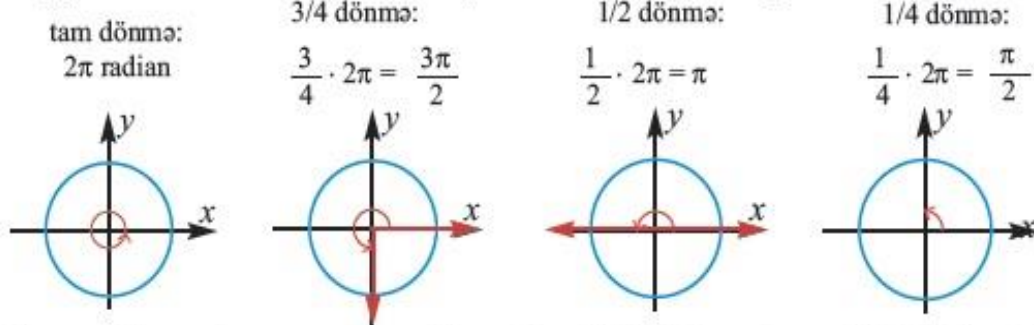
Uzunluğu radiusa bərabər olan qövsə uyğun mərkəzi bucağın ölçüsünə **1 radian** deyilir. Qövsün uzunluğunun çevrənin radiusuna nisbəti uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünü göstərir: $\alpha = \frac{l}{r}$. Bucağın radian ölçüsü radiusun uzunluğundan asılı deyil (şəkindəki fiqurların oxşarlığına görə izah edin).

Nümunə 1. Radiusu 4 sm olan çevrənin 12 sm uzunluqda qövsünə uyğun mərkəzi bucağı neçə radiandır?

Həlli: Verilmiş çevrədə 1 radian 4 sm uzunluqda qövsə uyğundur.

12 sm qövsə uyğun bucaq $12 : 4 = 3$ radian olar.

Çevrənin uzunluğu $2\pi r$ -dir. Radiusa (r) bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 1 radiandırsa, $2\pi r$ -ə bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 2π olar. Aşağıda müəyyən dönmələrə uyğun bucaqların radian ölçüləri göstərilib.



Bir tam dönmədə yaranan bucağın radian ölçüsü 2π , dərəcə ölçüsü isə 360° -dir. Yəni, 2π radian $= 360^\circ$. Buradan radian və dərəcə ölçüləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni müəyyən etmək olar.

Radianın dərəcəyə çevrilməsi:

$$2\pi \text{ radian} = 360^\circ$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Dərəcənin radiana çevrilməsi:

$$2\pi \text{ radian} = 360^\circ$$

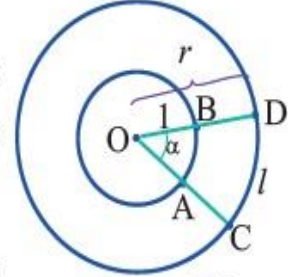
$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi. Xətti və bucaq sürəti.

Qövsün uzunluğu. Radiusu r olan çevrədə m° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu düsturunu yazaq: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$.

Qövsün uzunluğunu bucağın radian ölçüsündən istifadə etməklə daha sadə şəkildə yazmaq olar.

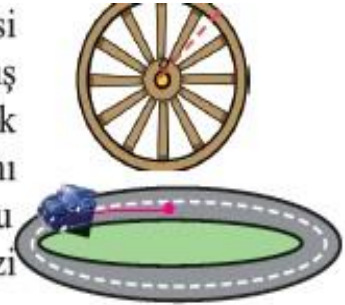
Radianın tərifinə görə $\frac{l}{r} = \alpha$ olduğundan qövsün uzunluğu bucağın radian ölçüsü ilə radiusun hasilinə bərabərdir: $l = \alpha \cdot r$



Qövsün uzunluğu çevrənin radiusu ilə düz mütənasibdir.

Sektorun sahəsi. m° -li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsi $S = \frac{\pi m}{360} \cdot r^2$; m° -li mərkəzi bucağın radian ölçüsü olduğunu nəzərə alaraq $\frac{\pi m}{180}$ - i α ilə işarə etsək, uyğun sektorun sahə düsturu $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$ olar.

Çevrə üzrə hərəkətdə, məsələn, təkərin O nöqtəsi ətrafında fırlanması zamanı onun üzərində götürülmüş hər hansı P nöqtəsinin sürətini iki cür qiymətləndirmək olar. Bunlardan biri nöqtənin təkərin fırlanması zamanı qət etdiyi məsafəyə görə müəyyən edilən sürətdir. Bu xətti sürət adlanır. Digəri isə dönmə bucağına (mərkəzi bucaq) görə olan sürət, yəni bucaq sürəti adlanır.



$$\text{xətti sürət} = \frac{\text{gedilən yol}}{\text{zaman}}$$

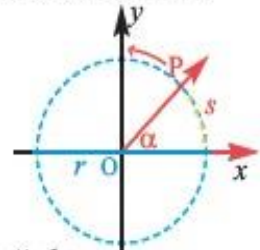
$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

$$\text{bucaq sürəti} = \frac{\text{dönmə bucağı}}{\text{zaman}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, xətti sürət gedilən yolun (uyğun çevrə qövsünün uzunluğunun) zamana olan nisbətinə bərabərdir.

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, bucaq sürəti dönmə bucağının zamana olan nisbətinə bərabərdir.



Burada, α (radianla) t zamandakı dönmə (fırlanma) bucağıdır.

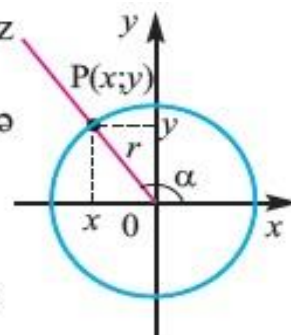
Xətti sürətlə bucaq sürəti arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\text{xətti sürət} = r \cdot \text{bucaq sürəti} \quad v_x = r \cdot \omega$$

Triqonometrik funksiyalar. İstənilən bucağın triqonometrik funksiyaları .Vahid çevrə.

Bucağın triqonometrik nisbətlərinin qiymətləri yalnız bucağın qiymətindən asılıdır.

Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi $P(x; y)$ olsun.

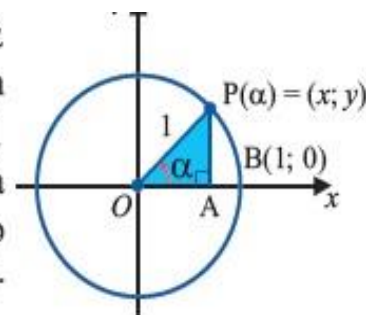


- P nöqtəsinin ordinatının radiusun uzunluğuna nisbətində α bucağının sinusu deyilir: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$
- P nöqtəsinin absisinin radiusun uzunluğuna nisbətində α bucağının kosinusu deyilir: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- P nöqtəsinin ordinatının absisinə nisbətində α bucağının tangensi deyilir: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ (burada $x \neq 0$, yəni P nöqtəsi ordinat oxu üzərində deyil)
- P nöqtəsinin absisinin ordinatına nisbətində α bucağının kotangensi deyilir: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ (burada $y \neq 0$, yəni P nöqtəsi absis oxu üzərində deyil)
- α bucağının kosekansı bu bucağın sinusunun tərsidir: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$ (burada $y \neq 0$)
- α bucağının sekansı bu bucağın kosinusunun tərsidir: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$ (burada $x \neq 0$)

Triqonometrik funksiyaların qiymətləri yalnız α bucağının qiymətindən asılı olub, çevrənin radiusundan asılı deyil. Ona görə də ümumiliyi pozmadan $R = 1$ qəbul edə bilərik. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 1-ə bərabər olan çevrəyə vahid çevrə deyilir. Vahid çevrənin üzərindəki nöqtələrin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəyir.

$P(\alpha) = (x; y)$ nöqtəsi α bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişdiyi nöqtə olarsa, triqonometrik funksiyalarla nöqtənin koordinatları arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

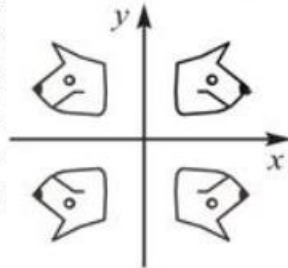
$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$



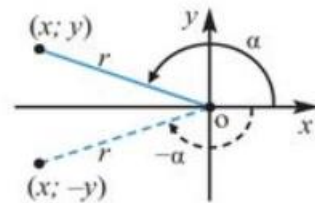
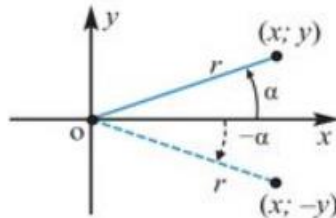
Çevirmə düsturları.

Triqonometrik eynilliklər

Koordinat müstəvisi üzərində I rübdəki obyektin y oxuna nəzərən əksətməsi ilə obyekt II rübdə yerləşir. II rübdə yerləşən obyektin x oxuna nəzərən əksətməsi ilə bu obyekt III rübdə yerləşdirilir. Bu isə I rübdəki ilkin obyektin koordinat başlanğıcına nəzərən əksətməsi ilə üst-üstə düşür. Həmçinin diqqət edin ki, y oxuna nəzərən əksətmə x oxuna nəzərən əksətmənin 180° dönməsi ilə üst-üstə düşür. x oxuna nəzərən bucağın son tərəfinin əksətməsi ilə onun



üzərindəki nöqtələrin koordinatları şəkildə göstərildiyi kimi dəyişir. Yəni, x oxuna əksətmə zamanı yalnız y koordinatının işarəsi dəyişir.



Deməli, kosinus x koordinatından asılı olduğundan dəyişmir, sinus isə işarəsini dəyişir. Beləliklə, α və $-\alpha$ bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimi olur:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}$$

Yəni, **sinus, tangens, kotangens funksiyaları tək, kosinus isə cüt funksiyadır.**

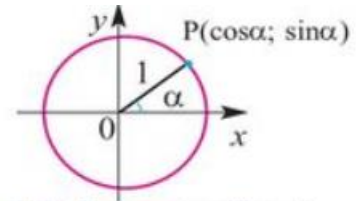
1) Arqument $90^\circ \pm \alpha$ və ya $270^\circ \pm \alpha$ şəkildədirsə, onda bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin “qoşma” triqonometrik funksiyasına çevrilir (yəni sinus kosinusa və tərsinə, tangens kotangensə və tərsinə).

2) Əgər arqument $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ \pm \alpha$ olarsa, bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin eyni adlı funksiyasına çevrilir.

Hər iki halda alınan funksiyanın işarəsi α bucağını iti bucaq qəbul etməklə çevrilən funksiyanın verilən rübdəki işarəsi ilə eyni olur.

Triqonometrik eyniliklər.

İstənilən α bucağı üçün $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ eyniliyinin doğruluğunu vahid çevrə üzərində götürülmüş nöqtələrin koordinatlarına görə izah etmək olar.



$x^2 + y^2 = r^2$ *Çevrənin tənliyi*

$x^2 + y^2 = 1$ *Vahid radiuslu çevrənin tənliyi*

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ *x və y koordinatlarının triqonometrik funksiyalarla əvəz edilməsi*

$\cos \alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sin \alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Bu bərabərliklərdən alırıq ki, eyni zamanda $\cos \alpha \neq 0$ və $\sin \alpha \neq 0$ şərtini ödəyən α bucaqları üçün $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ eyniliyi doğrudur.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bərabərliyinin hər iki tərəfini $\cos^2 \alpha$ -ya bölsək, alırıq:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ yəni, } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bərabərliyinin hər iki tərəfini $\sin^2 \alpha$ -ya bölsək, alırıq:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Bu bərabərliklərə əsas triqonometrik eyniliklər deyilir. Əsas triqonometrik eyniliklərə görə yazı bilərik:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{cases}$$

Toplama düsturları və alınan nəticələr.

İki bucağın cəmi və fərqinin triqonometrik funksiyaları

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Tangens və kotangens üçün də toplama düsturlarını yazmaq olar:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} = \\ &\quad \text{\textit{tərifə görə toplama düsturlarına görə}} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad \text{Deməli:} \\ &\quad \text{\textit{sadələşdirmə}} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \\ &\quad \text{\textit{surət və məxrəci } \cos\alpha \cdot \cos\beta \text{ hasilinə bölməklə}} \\ \text{Oxşar qayda ilə göstərin ki:} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \end{aligned}$$

Cəmin hasilə çevrilməsi

$$\begin{aligned} \alpha &= x + y \quad \text{olarsa, } x = \frac{\alpha + \beta}{2}, y = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \beta &= x - y \\ \sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x + y) + \sin(x - y) = \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y &= 2 \sin x \cos y. \quad \text{Deməli,} \\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{Oxşar qayda ilə alırıq:} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Hasilin cəmə çevrilməsi

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)) \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \end{aligned}$$

İkiqat arqumentin triqonometrik funksiyaları

Toplama düsturları $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ifadələrini α bucağının triqonometrik funksiyası ilə ifadə etməyə imkan verir.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned}$$

Beləliklə, ikiqat bucağın düsturları adlanan eynilikləri alırıq:

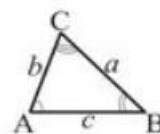
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

4 .Sinuslar və kosinuslar teoremi.

Sinuslar teoremi və üçbucağın sahəsi.

İstənilən $\triangle ABC$ -də a, b, c tərəfləri uyğun olaraq, $\angle A, \angle B, \angle C$ -nin qarşısında duran tərəflər olarsa:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$



Üçbucağın tərəfləri onun qarşı bucaqlarının sinusları ilə mütənasibdir.

Kosinuslar teoremi

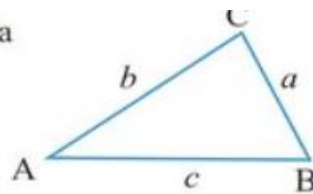
Tərəfləri a, b və c olan istənilən ABC üçbucağında

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

Üçbucağın hər hansı tərəfinin kvadratı bərabərdir:



qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinin iki misli.

5.Triqonometrik funksiyalar

Dövrü funksiyalar. $y = \sin x$ və $y = a \sin b x$ funksiyası və onların çevrilmələri, funksiyanın dövrü və amplitudu

Tutaq ki, elə $T \neq 0$ ədədi var ki, funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $x \pm T$ də təyin oblastına daxildir və $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ ödənilir. Onda $f(x)$ funksiyasına dövrü T olan dövrü funksiya deyilir. T dövrüdirsə, onda $n \cdot T$ də ($n \in \mathbb{Z}$) dövrüdür.

Doğrudan da, məsələn, $f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f(x \pm T) = f(x)$

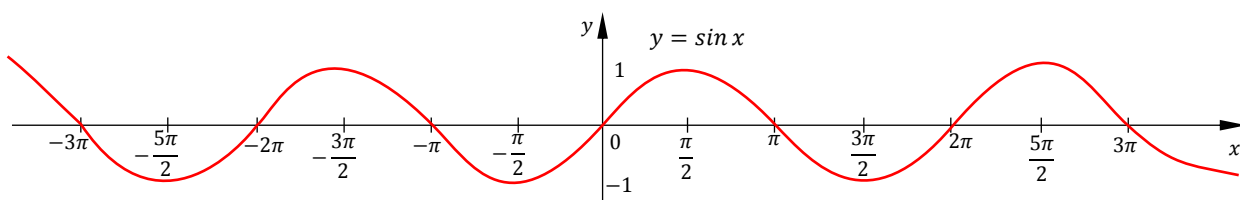
Funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünə onun əsas dövrü deyilir.

$y = \sin x$ funksiyasının tərfi, xassələri və grafiki.

Xəddənin sinusu Xradian bucağının sinusuna deyilir və $\sin x$ kimi işarə edilir.

Xassələr :

1. $D(\sin x) = (-\infty; +\infty)$ Bütün ədəd oxudur.
2. $E(\sin x) = [-1; 1]$.
3. $Y = \sin x$ funksiyası tək funksiyaadır. Yəni : $\sin(-x) = -\sin x$
4. $Y = \sin x$ funksiyası dövrü funksiyaadır və $T = 2\pi$
5. $Y = \sin x$ funksiyasının grafiki ordinant oxunu $(0;0)$ nöqtəsində kəsir.
6. Funksiyanın max. qiyməti 1, min.qiyməti -1 olur.
7. Qrafik:



$y = \cos x$ və $y = a \cos b x$ funksiyası və onların çevrilmələri, funksiyanın dövrü və amplitudu

$y = \cos x$ funksiyasının tərif, xassələri və qrafiki.

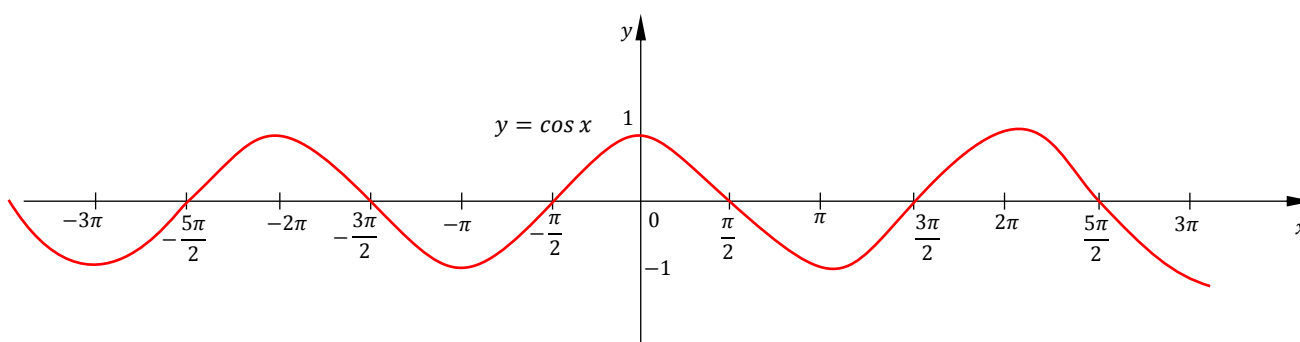
Xəbədinin cosinus x radian bucağının cosinusuna deyilir və $\cos x$ kimi işarə edilir.

Xassələr :

1. $D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$ Bütün ədəd oxudur.
2. $E(\sin x) = [-1; 1]$.
3. $y = \cos x$ cüt funksiyadır. $\cos(-x) = \cos x$
4. $y = \cos x$ funksiyası dövrü funksiyadır və $T = 2\pi$
5. $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0)$, ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində

kəsir.

6. Funksiyanın max. qiyməti 1, min. qiyməti -1 olur.
7. Qrafiki:

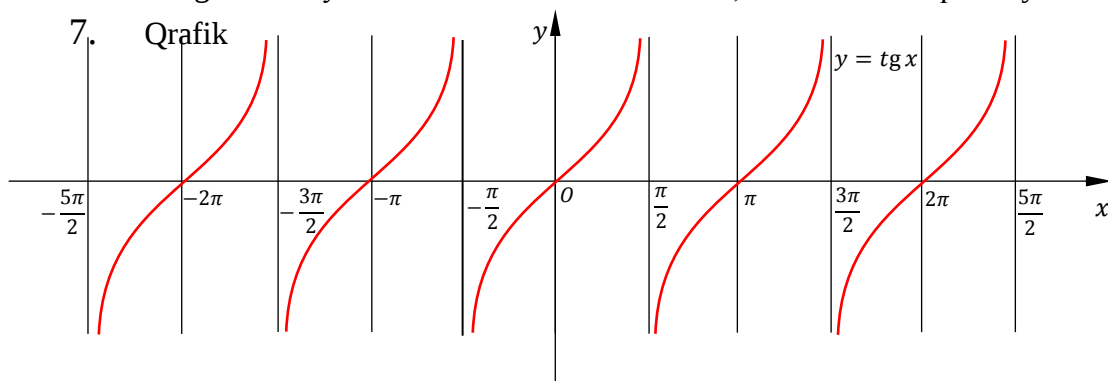


$y = \tan x$ və $y = a \tan b x$ funksiyası və qrafiki

$y = \tan x$ funksiyasının tərif, xassələri və qrafiki.

Xassələr :

1. $D(\operatorname{tg} x) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n); n \in \mathbb{Z}$
2. $E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$
3. $Y = \operatorname{tg} x$ funksiyası dövrü funksiyadır və $T = \pi$
4. $Y = \operatorname{tg} x$ funksiyası tək funksiyadır. Yəni $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
5. $Y = \operatorname{tg} x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(\pi n; 0)$, ordinat oxunu $(0; 0)$ nöqtəsində kəsir.
6. $Y = \operatorname{tg} x$ funksiyası bütün ədəd oxunda artandır, ekstremum nöqtələri yoxdur.
7. Qrafik

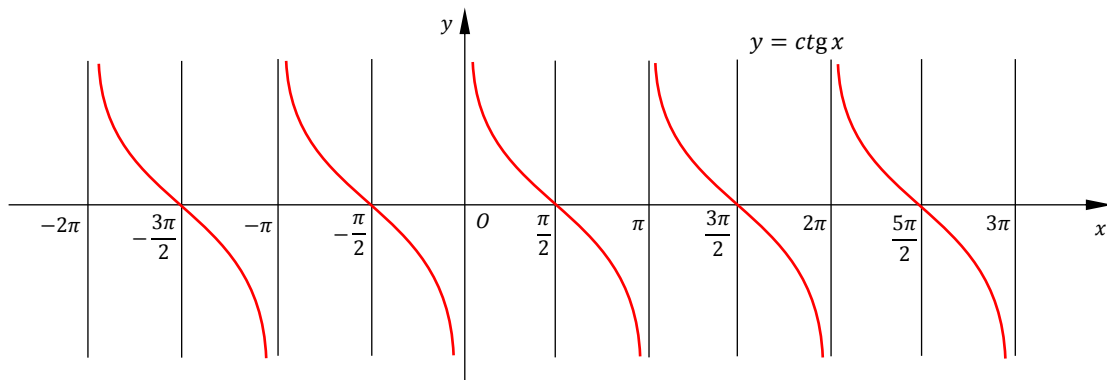


$y = \operatorname{ctg} x$ və $y = a \operatorname{ctg} b x$ funksiyası və qrafiki

$y = \operatorname{ctg} x$ funksiyasının tərfi, xassələri və qrafiki.

Xassələr :

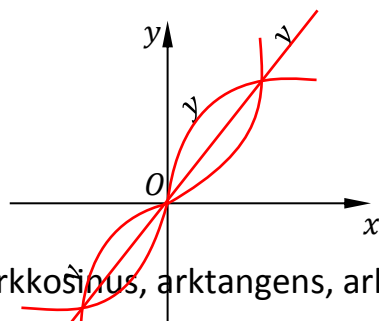
1. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyası $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ nöqtələrindən başqa bütün qiymətləri alır.
2. $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$
3. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyası dövrü funksiyadır və $T = \pi$
4. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyası tək funksiyadır. Yəni $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, ona görə qrafiki koordinat oxuna simmetrikdir.
5. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$ ordinat oxunu $(0; 0)$ nöqtəsində kəsir.
6. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyası bütün ədəd oxunda azalandır, ekstremum nöqtələri yoxdur.
7. Qrafiki



Tərs triqonometrik funksiyalar .Arcsinus, arccosinus, arctangens və arccotangens anlayışları.

Aşağıdakı xassələr doğrudur:

1. Verilmiş funksiyanın təyin oblastı tərs funksiyanın qiymətlər çoxluğu, qiymətlər çoxluğu isə tərs funksiyanın təyin oblastıdır.
2. $y=f(x)$ funksiyası artandırsa(azalandırsa) onun tərs funksiya da artandır (azalandır)
3. Tərs funksiyanın qrafiki ilə verilmiş funksiyanın qrafiki I və II rübün tən bölməni olan $y = x$ Düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.



Arksinus, arkkoşinus, arktangens, arkkotangens anlayışları.

Arksinus. $y = \sin x$ funksiyası $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında artır, deməli tərsi var.

$$\sin x_0 = y_0$$

$$x_0 = \arcsin y_0$$

Tərif. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ parçasından götürülən və sinusuna y_0 -a bərabər olan x_0 ədədinə y_0 ədədinin arksinusu deyilir və işarəsi $\arcsin$.

$$\text{Tərifə görə } \sin(\arcsin y_0) = y_0$$

$$(\arcsin(-y_0)) = -y_0$$

Arkkosinus. $[0, \pi]$ parçasında $y = \cos x$ funksiyası azalır, deməli tərsi var.

$$\cos x_0 = y_0$$

$$y_0 = \arccos x_0$$

Tərif. $[0, \pi]$ parçasından götürülən və kosinusuna y_0 -a bərabər olan x_0 ədədinə y_0 ədədinin arkkosinusu deyilir və işarəsi: $\arccos$

$$\text{Tərifə görə } \cos(\arccos y_0) = y_0 ; \arccos(-y_0) = \pi - \arccos y_0$$

Arktangens. $Y = \operatorname{tg} x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında artır, deməli tərsi var.

Tərif. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığından götürülən və tangensi y_0 -a bərabər olan x_0 ədədinə y_0 ədədinin arktangensi deyilir və işarəsi: arctg

Tərifə görə $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0$

$$\operatorname{arctg}(-y_0) = -y_0$$

Arkkotangens. $Y = \operatorname{ctg} x$ funksiyası $(0, \pi)$ azalır, deməli tərsi var.

Tərif. $(0, \pi)$ aralığından götürülən və kotangensi y_0 -a bərabər olan x_0 ədədinə y_0 ədədinin arkkotangensi deyilir və işarəsi arcctg

Tərifə görə $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y_0) = y_0$

$$\operatorname{arcctg}(-y_0) = \pi - \operatorname{arcctg} y_0$$

Tərs trigonometrik funksiyalara aid bəzi eyniliklər.

$$a) \sin(\operatorname{arcsin} x) = x \quad \text{əgər } x \leq 1$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin x) = x \quad \text{əgər } x \leq \pi/2 \quad \text{olarsa.}$$

$$\operatorname{arcsin}(-x) = -\operatorname{arcsin} x$$

$$\text{Misallar: 1. } \sin(\operatorname{arcsin} \frac{1}{2}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$2. \sin(\operatorname{arcsin}(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \operatorname{arcsin}(\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

$$4. \operatorname{arcsin} \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$5. \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ və } \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{ona görə } \operatorname{arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$6. \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{ona görə } \operatorname{arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$7. \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ və } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{ona görə } \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$8. \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ və } \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{ona görə } \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$9. \sin 0 = 0 \quad \text{və } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{ona görə } \operatorname{arcsin} 0 = 0$$

$$10. \operatorname{arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$11. \operatorname{arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad \text{və s.}$$

$$\text{b) } \cos(\arccos x) = x \quad \text{əgər } -1 \leq x \leq 1$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{əgər } 0 \leq x \leq \pi$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Misallar:

$$1. \cos 0 = 1 \text{ və } 0 \in [0, \pi]. \quad \text{ona görə } \arccos 1 = 0$$

$$2. \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in [0, \pi], \quad \text{ona görə } \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3. \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ və } \frac{\pi}{4} \in [0, \pi], \quad \text{ona görə } \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$4. \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ və } \frac{\pi}{3} \in [0, \pi], \quad \text{ona görə } \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$5. \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ və } \frac{\pi}{2} \in [0, \pi], \quad \text{ona görə } \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$6. \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \text{ona görə } \arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi - 0 = \pi$$

$$7. \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$8. \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{c) } \arctg(-x) = -\arctg x$$

$$1. \tg \frac{\pi}{4} = 1 \text{ və } \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{ona görə } \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$2. \tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ və } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{ona görə } \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$3. \tg \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{ona görə } \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$5. \arctg(-x) = -\arctg x, \quad \text{ona görə } \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

d)

$$1. \ctg \frac{\pi}{4} = 1 \text{ və } \frac{\pi}{4} \in (0, \pi), \quad \text{ona görə } \text{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$2. \ctg \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in (0, \pi), \quad \text{ona görə } \text{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$3. \ctg \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ və } \frac{\pi}{3} \in (0, \pi), \quad \text{ona görə } \text{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$4. \ctg \frac{\pi}{2} = 0 \text{ və } \frac{\pi}{2} \in (0, \pi), \quad \text{ona görə } \text{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$5. \text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x, \quad \text{ona görə } \text{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \text{arcctg} \sqrt{3} =$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Tərs triqonometrik funksiyalara aid bəzi eyniliklər

Cədvəl:

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\tg(\arctg x) = x$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{tg} x(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{ctg} x(\operatorname{arcctg} x) = x$$

$$\operatorname{ctg} x(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{ctg} x(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{ctg} x(\arctg x) = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$y = \arcsin x$ (arksinus) funksiyası

Xassələri:

$$1. D(\arcsin x) = [-1, 1]$$

$$2. E(\arcsin x) = [-\pi/2, \pi/2]$$

$$3. \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$4. y = \arcsin x \text{ funksiyası } [-1, 1] \text{ parçasında monoton artır.}$$

Qrafiki koordinat oxlarını koordinat başlanğıcında kəsir.

$$5. \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$6. \arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Misal :

$$x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$y = \arccos x$ (arkkosinus) funksiyası.

Xassələri :

$$1. D = [-1, 1]$$

$$2. E(\arccos x) = [0, \pi]$$

$$3. y = \arccos x \text{ funksiyası nə tək, nə cüt funksiyadır.}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

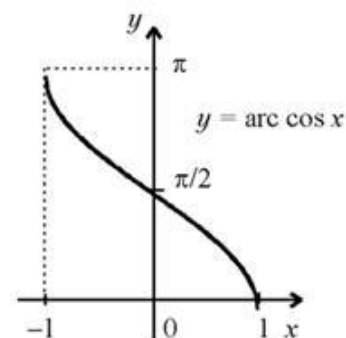
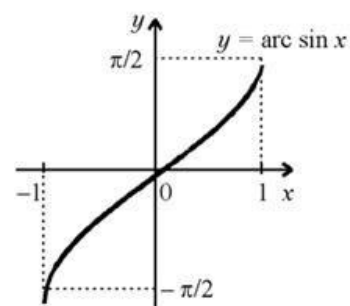
4. $y = \arccos x$ funksiyası $[-1, 1]$ parçasında monoton azalandır, absis oxunu $(1, 0)$ nöqtəsində ordinat oxunu $(0, \frac{\pi}{2})$ nöqtəsində kəsir.

$$5. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$6. \sin x(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \leq 1$$

$$7. \cos x(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \leq 1$$

$$8. \arccos x(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi]$$



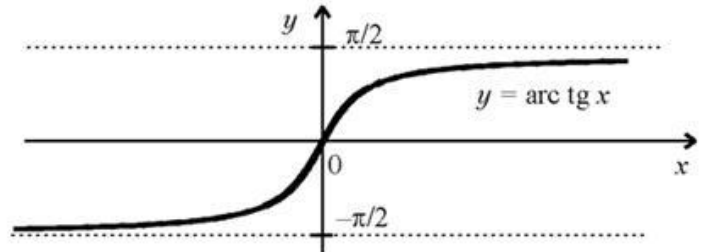
Misal:

$$x = \arccos \frac{1}{2}; \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$y = \operatorname{arctg} x$ (arktangens) funksiyası.

Xassələri :

1. $D(\operatorname{arctg} x) = R$
2. $E(\operatorname{arctg} x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
4. $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyası R -həqiqi ədədlər çoxluğunda monoton artır.



5. Qrafiki koordinat oxlarını koordinat başlanğıcında kəsir.

6. $-\infty < x < 0$ üçün $\operatorname{arctg} x < 0$; $0 < x < +\infty$ üçün $\operatorname{arctg} x > 0$

Misal:

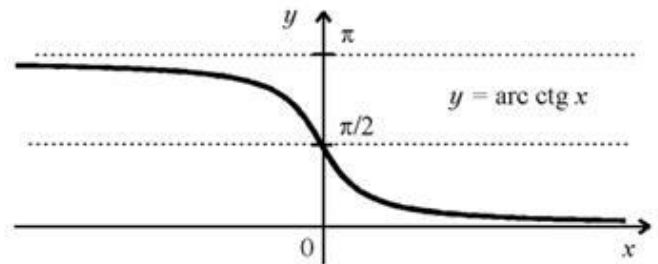
$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$y = \operatorname{arcctg} x$ (arkkotangens)

Xassələri :

1. $D(\operatorname{arcctg} x) = R$
2. $E(\operatorname{arcctg} x) = (0, \pi)$
3. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
4. $y = \operatorname{arcctg} x$ bütün ədəd oxunda azalandır.



5. Qrafiki OX oxunu kəsmir, OY oxunu $(0, \pi/2)$ -də kəsir.

6. $x \in [-\infty; +\infty]$ olanda $\operatorname{arcctg} x > 0$

$$7. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in R$$

$$8. \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$$

$$9. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$$

$$10. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x; \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$11. \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x; \quad x \in (0; \pi)$$

Misal: $x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$

$$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

6. Çoxüzlülər

Çoxüzlülər. Prizmalar onların müxtəlif görünüşləri. Prizmanın səthinin sahəsi. Onun müstəvi kəsikləri

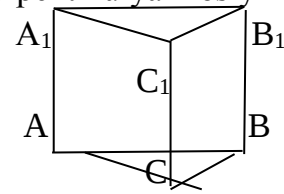
Səthi sonlu sayda müstəvi çoxüzlülərdən ibarət olan cismə çoxüzlü deyilir. Çoxüzlünün səthini təşkil edən müstəvi çoxbucaqlılara çoxüzlünün üzləri deyilir. Çoxbucaqlıların tərəfləri çoxüzlünün tilləri təpələrinə isə çoxüzlünün təpələri deyilir.

Bir üzə aid olmayan iki təpəni bitləşdirən parça çoxüzlünün dioqanalı adlanır.

İki üz bərabər uyğun tərəfləri paralel çoxbucaqlı qalan üzləri paraleloqram olan çoxüzlüyə prizma deyilir. Çoxbucaqlılar prizmanın oturacaqları, paraleloqramlar isə prizmanın yan üzləri adlanır. Prizmanın oturacaqlarının uyğun təpələrini birləşdirən parçalar onun yan tilləri adlanır. Prizmanın oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə onun hündürlüyü deyilir. Yan tilləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan prizmaya düz, perpendikulyar olmayana isə mail prizma deyilir.

Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan düz prizmaya düzgün prizma deyilir. Prizmanın üzlərinin sahələri cəminə onun tam səthi deyilir. $S_{\text{tam}} = S_{\text{yan}} + 2S_{\text{ot}}$.

Teorem 1: Prizmanın yan səthinin sahəsi onun perpendikulyar kəsinin perimetri ilə yan tili hasilinə bərabərdir.



Oturacaqları paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir. Paralelepipedlər prizmalar kimi, düz və mail olur.

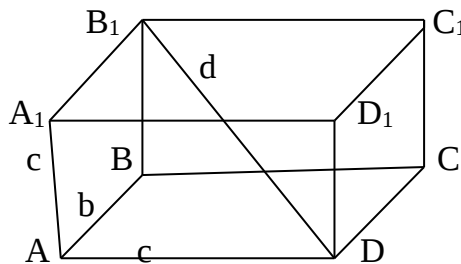
Teorem 1: Paralelepipedin qarşı üzləri paralel və bərabərdir.

Teorem 2: Paralelepipedin dioqanalları bir nöqtədə kəsişir və bu nöqtədə yarı bölünür.

Oturacaqları düzbucaqlı olan düz paralelepipedə düzbucaqlı paralelepiped deyilir.

Düzbucaqlı paralelepipedin bütün üzləri düzbucaqlıdır. Bir təpədən çıxan tillərinə onun ölçüləri deyilir. Düzbucaqlı paralelepipedin bir təpəsindən çıxan tillərini a, b, c ilə işarə etsək, onun tam səthi : $S = 2(ab+ac+bc)$.

Teorem 3: Düzbucaqlı paralelepipedin dioqanalının kvadratı onun üç ölçüsünün kvadratları cəminə bərabərdir.



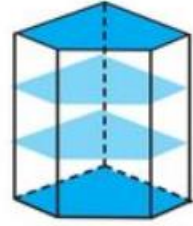
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ölçüləri bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedə kub deyilir.

Diqqət edin! Müstəvi kəsiyi dedikdə ayrılan hissə deyil, fiqurun üzərində qalan iz nəzərdə tutulur.

Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar müstəvi ilə kəşiməsindən alınan çoxbucaqlıya onun perpendikulyar kəsiyi deyilir. Prizmanın oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiyi oturacaqlara konqruent çoxbucaqlıdır.

Prizmanın eyni üzə aid olmayan iki yan tilindən keçən kəsiyə diaqonal kəsiyi deyilir.



n -bucaqlı prizmanın diaqonal kəsiklərinin sayı $\frac{n(n-3)}{2}$ -yə bərabərdir. Diaqonal kəsiklərinin hər biri paraleloqram olduğundan alınır ki, n bucaqlı prizmanın $n(n-3)$ sayda diaqonalı var.

Piramida onun yan və tam səthinin sahəsi. Kəsik piramida

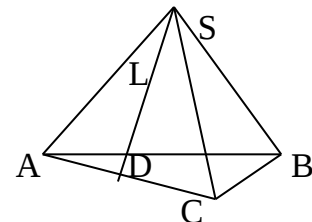
Səthi sonlu sayda müstəvi çoxüzlülərdən ibarət olan cismə çoxüzlü deyilir. Çoxüzlünün səthini təşkil edən müstəvi çoxbucaqlılara çoxüzlünün üzləri deyilir. Çoxbucaqlıların tərəfləri çoxüzlünün tilləri təpələrinə isə çoxüzlünün təpələri deyilir.

Bir üzü hər hansı çoxbucaqlı qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüyə piramida deyilir.

Ortaq təpəli üçbucaqlara piramidanın yan üzləri, onların birləşməsinə piramidanın yan səthi, çoxbucaqlıya piramidanın oturacağı, bütün yan üzlərin ortaq nöqtəsinə piramidanın təpəsi, yan üzlərin ortaq tərəflərinə piramidanın yan tilləri, təpədən oturacağa perpendikulyara piramidanın hündürlüyü deyilir. Yan üzə təpədən oturacağın tərəfinə çəkilmiş hündürlüyə apofem deyilir.

Oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyünün oturacağı bu çoxbucaqlının mərkəzi olan piramidaya düzgün piramida deyilir. Düzgün piramidanın hündürlüyünü saxlayan düz xəttə onun oxu deyilir.

Teorem 1: Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağın perimetri ilə apofemi hasilinə bərabərdir. $S_{\text{yan}} = n \cdot \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} Ph$. $S_{\text{tam}} = S_{\text{yan}} + S_{\text{ot}}$



Piramidanın oturacağı üçbucaq olduqda ona tetraedr deyilir.

1. Düzgün piramida. Kəsik piramida.

Səthi sonlu sayda müstəvi çoxüzlülərdən ibarət olan cismə çoxüzlü deyilir. Çoxüzlünün səthini təşkil edən müstəvi çoxbucaqlılara çoxüzlünün üzləri

deyilir. Çoxbucaqlıların tərəfləri çoxüzlünün tilləri təpələrinə isə çoxüzlünün təpələri deyilir.

Oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyünün oturacağı bu çoxbucaqlının mərkəzi olan piramidaya düzgün piramida deyilir. Düzgün piramidanın hündürlüyünü saxlayan düz xəttə onun oxu deyilir.

Teorem 1: Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağın perimetri ilə apofemi hasilinin yarsına bərabərdir. $S_{yan} = n \cdot \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} Ph$. $S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}$.

Piramidanın oturacağına paralel və onu kəsən müstəvi ilə oturacağı arasında qalan çoxüzlüyə kəsik piramida deyilir.

Düzgün piramidanın oturacağına paralel müstəvi ilə kəsəndə alınan kəsik piramida düzgün kəsik piramida adlanır.

Teorem 2: Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi onun oturacaqlarının perimetirləri cəminin yarsısı ilə apofemi hasilinə bərabərdir.

$$S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h. \quad S_{tam} = S_{alt} + S_{üst} + S_{yan}.$$

7. Triqonometrik tənliklər Və bərabərsizliklər

$$(\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a).$$

1. $\sin x = a$, bu tənlikdə $|a| > 1$ olarsa $\sin x = a$ tənliyinin həlli yoxdur.

$$\sin x = a$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $\cos x = a$ $|a| > 1$ olarsa $\cos x = a$ tənliyinin həlli yoxdu

$$\cos x = a \quad \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. $\operatorname{tg} x = a$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = a$$

$$x = \arcsin a + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sadə triqonometrik bərabərsizliklər

Tərif. Dəyişəni triqonometrik funksiya işarəsi altında olan bərabərsizliyə *triqonometrik bərabərsizlik* deyilir. Mürəkkəb triqonometrik bərabərsizliklərin həlli çevirmələr aparmaqla Sadə triqonometrik bərabərsizliklərin həllinə gətirilir. Sadə triqonometrik bərabərsizliklər

aşağıdakılardır:

$$\text{I. } \sin x > a, \quad (\sin x \geq a)$$

$$\sin x < a, \quad (\sin x \leq a)$$

$$\text{II. } \cos x > a, \quad (\cos x \geq a)$$

$$\cos x < a, \quad (\cos x \leq a)$$

$$\text{III. } \operatorname{tg} x > a, \quad (\operatorname{tg} x \geq a)$$

$$\operatorname{tg} x < a, \quad (\operatorname{tg} x \leq a)$$

$$\text{IV. } \operatorname{ctg} x > a, \quad (\operatorname{ctg} x \geq a)$$

$$\operatorname{ctg} x < a, \quad (\operatorname{ctg} x \leq a)$$

1. Həll zamanı $\sin x$, $\cos x$ üçün dövr- 2π , $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ üçün dövr — π olduğu

nəzərə alınır.

Ən Sadə triqonometrik bərabərsizliklərin həlli.

$$1) \sin x > a, \quad (\arcsin a; \pi - \arcsin a), \quad 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin x < a, \quad (-\pi - \arcsin a, \arcsin a)$$

$$3) \cos x > a, \quad (-\arccos a; \arccos a)$$

$$4) \cos x < a, \quad (\arccos a; 2\pi - \arccos a)$$

$$5) \operatorname{tg} x > a, \quad (\arctg a; \frac{\pi}{2} + \pi n), \quad \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6) \operatorname{tg} x < a, \quad (-\frac{\pi}{2}; \arctg a), \quad \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$7). \operatorname{ctgx} > a, \quad (\pi n; \operatorname{arccctga}), \quad \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$8). \operatorname{ctgx} < a, \quad (\operatorname{arccctga}; \pi + \pi n), \quad \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Misallar: } 1. \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{cavab: } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{cavab: } \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{cavab: } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \quad \text{cavab: } \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5. 3\operatorname{tg} x < \sqrt{3} \quad \text{cavab: } \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

8.Fəza fiqurlarının həcmi

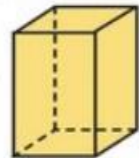
Prizma və piramidanın həcmi

Həcm düsturunda $a \cdot b$ hasilini oturmağın sahəsi, c isə hündürlük olduğundan onu belə də ifadə etmək olar: $V = S_{ot}h$

Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi oturmağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

Tilinin uzunluğu a olan kubun həcmi: $V = a^3$

İstənilən düz prizmanın həcmi oturmağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Bu təklifin doğru olduğunu oturmağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizma üzərində göstərək.

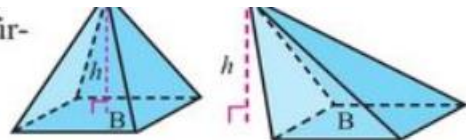


Prizmanın həcmi oturmağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

$$V = S_{ot}h$$

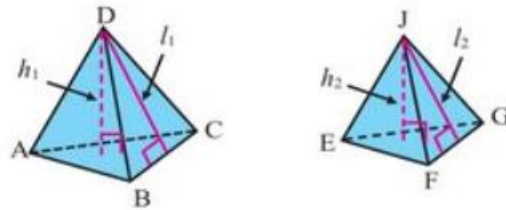
Piramidanın həcmi oturmağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$$V = \frac{1}{3} S_{ot}h$$



Fəza fiqurlarının oxşarlığı. Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmiləri

Çevrilmədə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə oxşarlıq çevrilməsi deyilir. Oxşarlıq çevrilməsi ilə biri digərinə çevrilən fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir. Oxşarlıq əmsalı ixtiyari iki uyğun nöqtələr cütü arasındakı məsafələrin nisbətinə bərabərdir.



$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = \frac{AD}{EJ} = \frac{BD}{FJ} = \frac{CD}{GJ} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} = k$$

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG, \Delta ABD \sim \Delta EFJ, \\ \Delta BCD \sim \Delta FGJ, \Delta ACD \sim \Delta EGJ$$

Uyğun xətti ölçülərin nisbətlərini göstərən ədədə oxşarlıq əmsalı deyilir.

Əgər iki fəza fiqurunun oxşarlıq əmsalı $\frac{a}{b}$ kimi olarsa, bu fiqurların səthlərinin (yan, tam, oturacaq) nisbəti $\frac{a^2}{b^2}$ kimi, həcmələrinin nisbəti isə $\frac{a^3}{b^3}$ kimi olar.



A fiquru



B fiquru

Oxşarlıq əmsalı: $\frac{a}{b}$

$$\frac{S_{\text{tamA}}}{S_{\text{tamB}}} = \frac{a^2}{b^2} \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3}$$

Kəsik piramidanın həcmi

Oturacaqlarının sahəsi S_1 və S_2 , hündürlüyü h olan kəsik piramidanın həcmi $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ düsturu ilə hesablanır.

9.Üstlü və loqarifmik funksiyalar

Həqiqi üstlü qüvvət üstlü funksiya və onun qrafik çevrilmələri.e ədədi

Qüvvətin xassələri:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- 6) $a > 1, x > y$ olduqda $a^x > a^y$, $0 < a < 1, x > y$ olduqda $a^x < a^y$
- 7) $a > b, x > 0$ olduqda $a^x > b^x$, $a > b, x < 0$ olduqda $a^x < b^x$
- 8) $a^x = a^y$ isə, onda $x = y$

$a > 0, a \neq 1$ olduqda, $y = a^x$ funksiya üstlü funksiya deyilir.

1) Üstlü funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$

2) Üstlü funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$$E(a^x) = (0; +\infty)$$

3) $x = 0$ olduqda, $a^0 = 1$ olduğundan üstlü funksiyanın qrafiki y oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.

4) $a > 1$ olduqda, a^x funksiyası artan, $0 < a < 1$ olduqda a^x funksiyası azalandır.

5) Üstlü funksiyanın qrafiki absis oxunu kəsmir və qrafiki x oxundan yuxarı yarımmüstəvidə yerləşir.

$y = a^x$ funksiya və onun qrafikinə eksponenta deyilir.

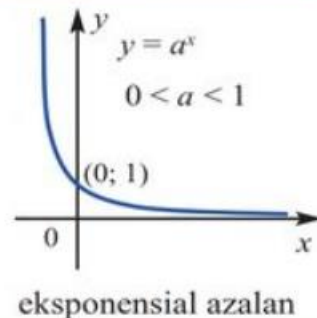
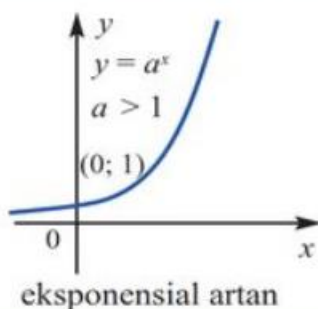
Eksponenta argumentin dəyişməsilə çox sürətlə artır və ya çox sürətlə azalır.

6) $0 < a < 1$ olduqda x -in sonsuz böyüməsilə y -in uyğun qiymətləri kiçilir və $y = a^x$ funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.

$a > 1$ olduqda $x \rightarrow -\infty$ olduqda qrafik üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.

Absis oxu üstlü funksiyanın üfüqi asimptotudur.

Eksponensial artan , eksponensial azalan funksiyalar



Loqarifmanın əsası 10 olarsa , ona onluq loqarifma deyilir və $\log_{10} b$ əvəzinə $\lg b$ yazılır. Əsası $e \approx 2,7$ olan loqarifmaya *Natural* loqarifma deyilir və belə yazılır : $\ln b$.

Ədədin loqarifmasının tərfi. Hasilin, nisbət, qüvvətin loqarifması. Loqarifmik funksiya, onun xassələri və qrafiki. Üstlü və loqarifmik tənliklərin həlli.

b ədədini almaq üçün a əsasını yüksəltmək lazım gələn qüvvət üstünə b ədədinin a əsasına görə loqarifması deyilir və belə yazılır: $\log_a b$. Yəni, $a^x = b$ olarsa $x = \log_a b$.

Buradan alınır ki, $a^{\log_a b} = b$ eyniliyi doğrudur.

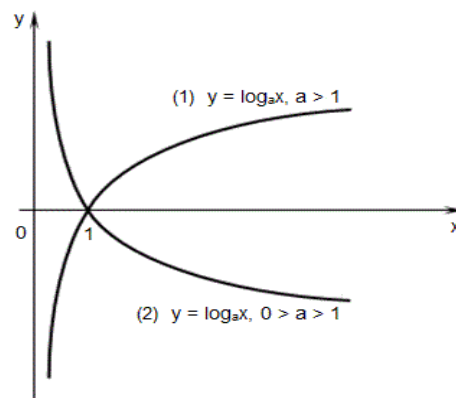
Loqarifmanın xassələri:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$
6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Loqarifmik funksiya, xassələri, qrafiki.

$a > 0$, $a \neq 1$ olduqda $y = \log_a x$ ($x > 0$) düsturu ilə verilən funksiya *loqarifmik funksiya* deyilir. Xassələri:

1. $D(f) = (0; \infty)$
2. $E(f) = \mathbb{R}$
3. Nə tək, nə cütdür.
4. Dövrü deyil.
5. $a > 1$, $x > 1$ olduqda $\log_a x > 0$ olur.
 $0 < a < 1$, $x > 1$ olduqda $\log_a x < 0$ olur.
6. Qrafiki:



Loqarifmik tənliklər.

Tərif. Dəyişəni yalnız loqarifma işarəsi altında və ya loqarifm əsasında, yaxud da eyni zamanda

Hər ikisində olan tənliklərə *loqarifmik tənliklər* deyilir. Ən sadə *loqarifmik tənlik* $\log_a x = b$,

($a > 1$, $a \neq 1$) *tənliklərdir*. *Loqarifmik tənliklər* müxtəlif üsullarla həll olunur. Tənliklərin həll üsullarını misallarla izah edək:

1. *Loqarifmin* tərifinə əsasən həll olunan tənliklər.

Misal 1. $\log_2(3x + 2) = 3$

Həlli: *Loqarifmin* tərifinə əsasən $3x + 2 = 2^3$; $3x = 8 - 2$; $3x = 6$; $x = 2$.

$x = 2$ verilmiş tənliyin köüdür.

Misal 2. $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$

Həlli: *Loqarifmin* tərifinə əsasən $x^2 - 5x + 7 = x - 1$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 4,$$

burada $x=2$ olduqda *loqarifmin* əsası 1 olur , lakin bilirik ki əsas $\neq 1$ olmalıdı.

deməli ,həll $x=4$ –dür.

2. Yeni dəyişən daxil etməklə həll olunan tənliklər.

Misal 3. $5lq^2x - lqx^2 - 16 = 0,$ $lqx^2 = 2lqx$ olduğunu nəzərə alsaq

Həlli: $5lq^2x - 2lqx - 16 = 0$ $lqx = t$ əvəzləməsi aparaq.

$$5t^2 - 2t - 16 = 0 \quad \text{alarıq.}$$

$$t_1 = -\frac{2}{5}, t_2 = \frac{4}{5}, \quad \text{tapılır. Bunları əvəzləmədə yrinə yazsaq:}$$

$$lqx = -\frac{2}{5}, \quad x = 10^{-\frac{2}{5}},$$

$$lqx = \frac{4}{5}, \quad x = 10^{\frac{4}{5}}, \quad \text{həllərini tapırıq.}$$

3. Potensiallama üsulu ilə həll olunan tənliklər.

Misal 4: $lq(x^2 + 21) - 1 = lqx$

Həlli: $lq(x^2 + 21) - lqx = 1$

$$lq \frac{x^2+21}{x} = lq10 \quad \text{potensiallayaq:}$$

$$\frac{x^2 + 21}{x} = 10$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x_1 = 7, x_2 = 3; \quad \text{hər iki kök tənliyi ödəyir.}$$

4.Hər iki tərəfi eyni əsasa görə *loqarifmləmə* üsulu ilə həll olunan tənliklər.

Misal 5. $x^{\log_2 x + 2} = 8$

Həlli: $\log_2 x^{\log_2 x + 2} = \log_2 8,$ *eyni 2 əsasına görə loqarifmlədik.*

$$(\log_2 x + 2) * \log_2 x = \log_2 8,$$

$$(\log_2 x + 2) * \log_2 x = \log_2 2^3,$$

$$(\log_2 x + 2) * \log_2 x = 3$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 3 = 0$$

$$\log_2 x = y \quad \text{əvəzləməsi aparaq}$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = -3$$

$$\log_2 x = 1; \quad x = 2$$

$$\log_2 x = -3; \quad x = \frac{1}{8}.$$

5.Bir əsasdan başqa əsasa keçmə yoluyla həll olunan tənliklər.

Üstlü tənliklər

Üstlü funksiyaların xassəsi. $a \neq 1, a > 0$ şərti ilə $a^x = a^y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.

Bu xassəyə görə alırıq:

- 1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ üstlü tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyi ilə eynigüclüdür.
- 2) $a^x = c$ tənliyini $c > 0$ olduqda $a^x = a^{\log_a c}$ şəklində yazsaq, $x = \log_a c$ alırıq. Verilmiş üstlü tənliklər müəyyən üsullarla sadə üstlü tənliklərə gətirilib, həll edilir.

Üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər

Üstlü bərabərsizliklərin həlli adətən $a^x > a^b$ və ya $a^x < a^b$ bərabərsizliklərinin həllinə gətirilir. Burada $a > 0, a \neq 1$.

Bu bərabərsizliklərin həlli isə $y = a^x$ üstlü funksiyanın artan və ya azalan olması xassəsinin köməyiylə həll edilir:

$a > 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə eynigüclüdür. $0 < a < 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə eynigüclüdür.

Nümunə.

$2^{x+1} > 8$ verilən bərabərsizlik
 $2^{x+1} > 2^3$ qüvvətin xassəsi
 $x+1 > 3$ eynigüclü bərabərsizlik
 $x > 2$ bərabərsizliyin həlli

Nümunə.

$0,2^{x-1} > 0,04$ verilən bərabərsizlik
 $0,2^{x-1} > 0,2^2$ qüvvətin xassəsi
 $x-1 < 2$ eynigüclü bərabərsizlik
 $x < 3$ bərabərsizliyin həlli

$c = a^{\log_a c}$ eyniliyinə görə $a^x > c$ (və ya $a^x < c$) bərabərsizliyi $a^x > a^{\log_a c}$ (və ya $a^x < a^{\log_a c}$) bərabərsizliyinin həllinə gətirilir

Loqarifmik bərabərsizliklər dəyişənin mümkün qiymətləri, loqarifmik funksiyanın artan (və ya azalan) olması xassəsi nəzərə alınmaqla həll edilir.

Nümunə. $\log_2(x+1) > \log_2 7$

Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x+1 > 0$, $\log_2 x$ funksiyanın artan olduğundan $x+1 > 7$ olmalıdır. Deməli, $x+1 > 0$ və $x+1 > 7$ bərabərsizliyini ödəyən x -ləri tapmalıyıq.

Buradan $x > 6$. Cavab: $(6; +\infty)$

Nümunə. $\log_{0,2}(x-1) > \log_{0,2} 3$

Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x-1 > 0$, $\log_{0,2} x$ funksiyanın azalan olduğundan $x-1 < 3$ olmalıdır. Deməli, $0 < x-1 < 3$ ikiqat bərabərsizliyini həll etməliyik.

Buradan $1 < x < 4$. Cavab: $(1; 4)$

$a > 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	eynigüclü bərabərsizlik
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

$0 < a < 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	eynigüclü bərabərsizlik
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

10. Kompleks ədədlər

Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər.

$z = a + bi$ ifadəsinə kompleks ədəd deyilir. Bu kompleks ədədlər üçün aşağıdakı əməllər doğrudur:

- I. $a + bi$ və $c + di$ ədədləri üçün $a + bi = c + di$ bərabərliyi yalnız $a = c$ və $b = d$ olduqda doğrudur.
- II. $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
- III. $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

Tərif. Göstərilən əməllər ödəndikdə $a + bi$ şəklində olan ifadəyə kompleks ədəd deyilir.

$z = a + bi$ — kompleks ədədin *cəbri şəklidir*.

$a - bi$ kompleks ədədinə isə $z = a + bi$ kompleks ədədin qoşması deyilir. $\bar{z} = a - bi$ kimi yazılır.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ifadəsinə kompleks ədədin *modulu* deyilir.

$z_1 = a_1 + b_1i$ və $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks ədədlərini **bölək**.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i, \quad \text{olar.}$$

Kompleks ədədin həndəsi təsviri, kompleks ədədin modulu və argumenti, kompleks ədədin triqonometrik şəkli.

$z = a + bi$ kompleks ədədinə düzbucaqlı koordinat sistemində $A(a;b)$ nöqtəsini qarşı qoyaq.

$\overrightarrow{OA}$ vektoruna kompleks ədəd kimi baxmaq olar. Başlanğıc nöqtəsi $O(0;0)$ olan $\overrightarrow{OA}$ vektoru

kompleks ədədin həndəsi təsviridir. Vektorun uzunluğu $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə $z = a + bi$ kompleks ədədin modulu deyilir və $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$ kimi yazılır.

Tərif. Verilmiş kompleks ədədin *argumenti* bu kompleks ədədə qarşı qoyulan vektorun həqiqi oxun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağa deyilir.

z — in argumenti $\varphi = \arg z$ kimi yazılır. Əgər φ bucağı z — in hər hansı *argumenti* isə $\varphi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

bucağı da onun *argumentidir*. Ədədin *argumenti* olaraq $(0; 2\pi)$ aralığına düşən bucaq götürülür. $z = 0$

kompleks ədədin *arqumenti* təyin olunmur. Ona görə də $z \neq 0$ götürülür.

Şəkilə əsasən $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{R}$; $\sin \varphi = \frac{b}{R}$ bərabərliyi doğrudur.

Bəzən $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ bərabərliyindən $z = a + bi$ kompleks ədədin *arqumenti* tapılır.

$z = a + bi$ kompleks ədədin *arqumenti* aşağıdakı kimi tapmaq olur:

Kompleks ədədin həndəsi təsviri:

I rüb olanda $\varphi = \alpha$ olur.

II rüb olanda $\varphi = \pi - \alpha$ olur.

III rüb olanda $\varphi = \pi + \alpha$ olur.

IV rüb olanda $\varphi = 2\pi - \alpha$ olur. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{|b|}{|a|}$ kimi tapırıq.

Misal 1. $z = -\sqrt{3} + 3i$ ədədinin *arqumentini* tapmaq.

$a = -\sqrt{3}, b = 3$; II rübdə yerləşir.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|3|}{|-\sqrt{3}|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Onda $\varphi = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}; \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Misal 2. $z = 1 - i$ ədədinin *arqumentini* tapmaq.

$a = 1, b = -1$; IV rübdə yerləşir.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|-1|}{|1|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}; \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Trigonometrik şəkli. $z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ifadəsi z kompleks ədədin trigonometrik şəkli adlanır.

Trigonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər:

1. $z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha); w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ hasilini tapmaq:

$$w = R r (\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi))$$

$$2. \quad \frac{z}{w} = \frac{R(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{R}{r} \frac{R(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{R}{r} (\cos(\alpha - \varphi) + i \sin(\alpha - \varphi))$$

$$3. \quad z^n = R^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

4. Həqiqi ədədlərdə olduğu kimi n -ci qüvvəti z -ə bərabər olan kompleks ədədə ,
 z

Kompleks ədədinin n -ci dərəcədən kökü deyilir və $\sqrt[n]{z}$, $(n \in \mathbb{N})$ kimi işarə olunur.

Muavr düsturu: Xüsusi halda n tam ədədi üçün

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Düsturu doğrudur. Bu düstur *Muavr* düsturudur.

Ədəbiyyat

1. Cəbr və analizin başlanğıcı. Dərslik. 10 – cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b. Çəşioğlu, 2014

2. Həndəsə. Dərslik. 10- cu sinif. Mərdanov M., Mirzəyev S. və b.

Çəşioğlu, 2014

3. Cəbr. Dərslik. 9 cu sinif. Mərdanov M., Yaqubov M. və b.

Çəşioğlu, 2014