

Azərbaycan Texniki Universitetinin nəzdində

Bakı Texniki Kolleci

“Ümumtəhsil fənlər” fənn birliyi

“Riyaziyyat” fənnindən II smestr üçün

MÜHAZİRƏLƏR

Mündəricat

1.Coxhədlilər.

Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi	3
Qalıq haqqında teorem	3
Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem	4
Rasional köklər haqqında teorem.....	4
Cəbrin əsas teoremi (Qauss teoremi)	5
Coxhədli funksiya	7
Rasional funksiya.....	8

2. Fəzada vektorlar

Fəzada düzbucaqlı kordinant sistemi.....	9
Fəzada vektorlar	12
İki vektorun skalyar hasili.....	13
Düz xəttin ümumi tənliyi.....	14
Müstəvinin tənliyi	16
Müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti.Sferanın tənliyi.	
Fəzada və müstəvidə çevrilmələr.	17
Fəzada və müstəvidə çevrilmələr.	18

3.Limit.

Funksiyanın nöqtədə limiti.	
Funksiyanın qiymətlər cəvəlinə və qrafikinə görə limitin tapılması.	20
Sonsuz limitlər və sonsuzluqdz limit.	
Şaquli və üfiqi asimptotlar.Ədədi ardıcılığın limiti.	25

4. Fırlanma fıqurları.Silindr,konus,kürə

Fırlanma fıqurları .Silindir və onun səthinin sahəsi.	27
Konus və onun səthinin sahəsi.	28

5.Funksiyanın törəməsi

Dəyişmənin orta sürəti,dəyişmənin ani sürəti.	29
Funksiyanın törəməsi.	30
Törəmənin hədəsi mənası.Toxunanın tənliyi.	30
Diferensiallama qaydaları.	31
Hasilin və nisbətin törəməsi.	34
İkinci tərtib törəmə. Gedilən yol, sürət, təcil.	36
Üstlü funksiyanın törəməsi.	37
Loqarifmik funksiyanın törəməsi.....	38
Trigonometrik funksiyların törəməsi.....	39

1. Cöxlədlilər.

Çöxlədlinin çöxlədlİYə bölünməsi

Tərif: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ifadəsinə n dərəcəli
birdəyişənli çöxlədlİ deyilir.

Burada x dəyişən, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ müəyyən ədədlərdir və $a_n \neq 0$. $a_n x^n$ baş hədd,
 a_n baş əmsal, a_0 sərbəst hədd adlanır.

Tam ədədləri budaqlı bölmə qaydasına oxşar qayda ilə çöxlədlini çöxlədlİYə bölmək
olar.

Tam ədədləri bölmə əməlini **Bölünən = qismət $\times$ bölən + qalıq**: bərabərliyinə görə
yoxlayırıq.

Çöxlədlini çöxlədlİYə bölmə əməli üçün də eyni qayda doğrudur. Bölünən çöxlədlİ $P(x)$,
bölən $B(x)$, natamam qismət $Q(x)$, qalıq $R(x)$ olduqda və ya $P(x) = Q(x) B(x) + R(x)$

Çöxlədlini $x - m$ ikihədlisinə bölmə üçün sintetik qayda (Hörner sxemi)

Çöxlədlini $x - m$ ikihədlisinə bölərkən budaqlı bölməyə alternativ olan sintetik
bölmə qaydasından da istifadə edilir. Sintetik bölmədə çöxlədlinin yalnız əmsalları
istifadə edildiyindən daha az hesablamalar aparmaq lazım gəlir.

Qalıq haqqında teorem

Teorem: $P(x)$ çöxlədlisinin $x - m$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $P(x)$
çöxlədlisinin $x = m$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir.

$$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m), \quad r = P(m)$$

Nümunə. Qalıq haqqında teoremə görə $P(x) = x^3 - 11x + 9$ çoxhədlisinin $x + 4$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

Həlli: $x + 4 = x - (-4)$ şəklində yazaq. Deməli, $m = -4$.

Qalıq haqqında teoremə görə

Qalıq $r = P(-4) = (-4)^3 - 11(-4) + 9 = -64 + 44 + 9 = -11$ olur.

Qalıq haqqında teorem (Bezu teoremi) $x^3 - 11x + 9 = (x + 4)Q(x) + r$ şəklində yazsaq, $Q(x) = x^2 - 4x + 5$ və $r = -11$ olar. İsbatı: $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$ bərabərliyində $x = m$ yazsaq, $P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r$, buradan da $r = P(m)$ alınır.

Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem.

Tərif: x dəyişənin $P(x)$ çoxhədlisini sıfıra çevirən qiymətinə (yəni $P(x) = 0$ tənliyinin köklərinə) **çoxhədlinin kökü** (və ya sıfırı) deyilir.

Teorem.: m ədədi $P(x)$ çoxhədlisinin köküdürsə, $x - m$ ikihədlisi $P(x)$ -in vuruğudur. Doğrudan da, $P(m) = 0$ olarsa, $P(x) = (x - m)Q(x) + P(m)$ bərabərliyindən $P(x) = (x - m)Q(x)$ alınır. Bu təklifin tərsi də doğrudur, yəni $x - m$ ikihədlisi $P(x)$ çoxhədlisinin vuruğudursa, onda $P(m) = 0$.

Nümunə 1. $x - 1$ və $x + 2$ ikihədlilərinin $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ çoxhədlisinin vuruqları olub-olmadığını vuruqlar haqqında teoremə görə müəyyən edin.

Rasional köklər haqqında teorem

Əmsalları tam ədədlər olan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ çoxhədlisinin rasional kökü varsa, bu kök $\frac{p}{q}$ bölünsün q nün sərbəst həddin (a_0 -in) böləni, baş əmsalın (a_n -in) böləni kimidir.

Çoxhədlinin rəşional köklərini axtararkən ařağıdaki addımları yerinə yetirin.

1. Surəti sərbəst həddin, məxrəci baş əmsalın böləni olmaqla bütün mümkün kəsrlər çoxluğu yazılır.
2. Bu ədədlərdən çoxhədlinin qiymətini sıfıra çevirənləri yoxlayıb seçməklə çoxhədlinin kökü olan m ədədi, yəni çoxhədlinin qalıqsız bölündüyü $x - m$ ikihədlisi müəyyən edilir.
3. Verilən çoxhədlini $x - m$ ikihədlisinə sintetik bölməni yerinə yetirməklə digər vuruq müəyyən edilir.
4. Digər vuruq kvadrat üçhədli və ya müxtəsər vurma düsturları ilə vuruqlarına ayrılan çoxhədli olarsa, digər kökləri tapılır. Bu mümkün olmadıqda sintetik bölmə qaydası çoxhədlinin bütün xətti vuruqları tapılana qədər davam etdirilir.
5. Yazılmış kəsrlər çoxluğundakı ədədlərin heç biri çoxhədlinin sıfırı olmaya bilər.

Deməli, bu halda çoxhədlinin rəşional kökü yoxdur.

Məsələn:

$$f(x) = x^3 + x + 1 \text{ çoxhədlisinin rəşional kökü } \pm 1 \text{ ola bilər.}$$

$$\text{Yoxlayaq: } f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1 \neq 0; f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0.$$

Bu o deməkdir ki, $f(x) = x^3 + x + 1$ çoxhədlisinin rəşional kökü yoxdur

Cəbrin əsas teoremi (Qauss teoremi)

Teorem: Dərəcəsi sıfırdan böyük olan istənilən çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda ən azı bir kökü var.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dərəcəsi sıfırdan böyük ,

kompleks əmsallı çoxhədlirsə, cəbrin əsas teoreminə görə onun ən azı bir r_1 kökü var.

Vuruqlar haqqında teoremə görə:

$$P(x) = (x - r_1)Q_1(x) \quad \text{alırıq.}$$

Burada $Q_1(x)$ çoxhədlisi $n-1$ dərəcəlidir.

$n-1 = 0$ olarsa, $Q_1(x) = a_n$

$n-1 \neq 0$ olarsa, yenə həmin teoremə görə $Q_1(x)$ çoxhədlisinin ən azı bir kökü var və

bunu r_2 ilə işarə etsək,

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x) \quad \text{ayrılışı doğru olar,}$$

$Q_2(x)$ isə $n-2$ dərəcəli çoxhədlidir.

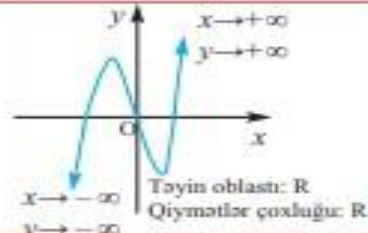
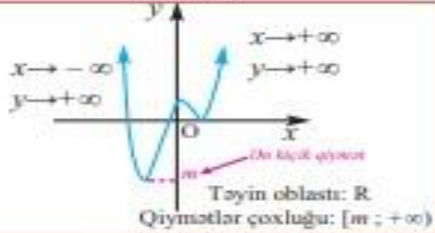
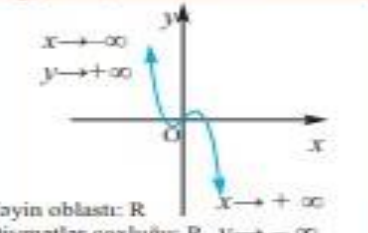
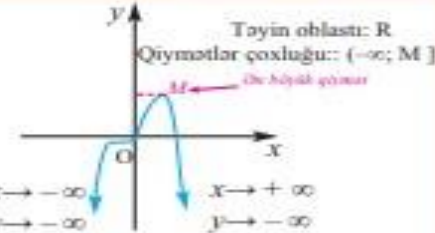
Deməli, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$ ayrılışını yaza bilərik.

Çoxhədli funksiyanın qrafiki

Çoxhədli funksiya standart şəkildə $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ kimi yazılır. Xüsusi halda, $n = 1$ olduqda xətti funksiya (qrafiki düz xətdir), $n = 2$ olduqda kvadrat funksiya (qrafiki paraboladır) alınır.

İstənilən çoxhədli funksiya bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunub və qrafiki kəsilməz, qırılmayan xətdir.

Arqumentin modulea böyük qiymətlərində çoxhədli özünü baş həddlə ifadə olunmuş $y = a_n x^n$ funksiyası kimi aparır. Aşağıda çoxhədlinin qrafiklərinə aid nümunələr və onların bəzi xassələri verilmişdir.

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$		
	n təkdir	n cütdür
$a_n > 0$	 Təyin oblası: $\mathbb{R}$ Qiymətlər çoxluğu: $\mathbb{R}$	 Təyin oblası: $\mathbb{R}$ Qiymətlər çoxluğu: $[m; +\infty)$
$a_n < 0$	 Təyin oblası: $\mathbb{R}$ Qiymətlər çoxluğu: $\mathbb{R}$	 Təyin oblası: $\mathbb{R}$ Qiymətlər çoxluğu: $(-\infty; M]$

Nümunə 1. Dərəcəsinə və baş həddin əmsalına görə arqumentin modulea böyük qiymətlərində çoxhədlinin özünü necə aparmasını müəyyən edin.

a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

Həlli: a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ çoxhədlinin dərəcəsi 3-dür, təkdir. Baş həddin əmsalı -2 -dir. Cədvəldən də göründüyü kimi, bu halda $x \rightarrow -\infty$ olduqda, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ olduqda $f(x) \rightarrow -\infty$ olur.

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ çoxhədlinin dərəcəsi 4-dür, cütdür. Baş həddin əmsalı 1 -dir. Bu halda $x \rightarrow -\infty$ olduqda $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ olduqda $f(x) \rightarrow +\infty$ olur.

RASİONAL FUNKSİYALAR.

Ümumi halda rasiional funksiyanın qrafikini qurmaq üçün onun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri (əgər varsa) və asimptotları müəyyən edilməlidir.

Funksiyanın verildiyi ifadə $x=a$ nöqtəsində məxrəci sıfıra çevrilən, surəti isə sıfırdan fərqli kəsir şəklində olarsa, rasiional funksiyanın şaquli asimptotu var.

f rasiional funksiyanın üfüqi asimptotu $P(x)$ və $Q(x)$ çoxhədlilərinin m və n dərəcələrinin qiymətlərindən asılı olaraq müəyyən edilir.

$m < n$ olarsa, $y = 0$ düz xətti qrafikin üfüqi asimptotudur.

$m = n$ olarsa, $y =$ düz xətti qrafikin üfüqi asimptotudur.

$m > n$ olarsa, qrafikin üfüqi asimptotu yoxdur.

$m = n + 1$, yəni sürətdəki çoxhədlinin dərəcəsi məxrəcdəki çoxhədlinin dərəcəindən 1 vahid böyük olduqda, çoxhədlilərin bölünməsindən alınan qismət $y = ax + b$ şəklində xətti funksiya olur və x -in modulca böyük qiymətlərində funksiyanın qrafiki bu düz xəttə sonsuz yaxınlaşır.

Bu halda deyirlər ki, $y = ax + b$ düz xətti rasiional funksiyanın maili asimptotudur.

2.Fəzada vektorlar

Fəzada düzbucaqlı kordinant sistemi.

Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi: Fəzada ixtiyari O nöqtəsi götürək və bu nöqtədən cüt-cüt perpendikulyar üç düz xətt keçirək. O nöqtəsini koordinat başlanğıcı qəbul edib, düz xətlər üzərində müsbət istiqamət və uzunluq vahidi seçməklə onları Ox , Oy , Oz koordinat oxları adlandıraraq. O koordinat başlanğıcı hər bir koordinat oxunu iki (müsbət və mənfi) yarımoxa bölür. Üç koordinat oxu cüt-cüt kəsişərək koordinat müstəvilərini yaradır. Oxy müstəvisi üfüqi götürülür, Oz oxu isə müsbət istiqaməti yuxarı yönəlməklə şaquli çəkilir. Bu qayda ilə yaradılan üçölçülü koordinat sistemi sağ əl sistemi də adlandırılır. Sağ əlinizin barmaqlarını x oxunun müsbət istiqamətindən y oxunun müsbət istiqamətinə doğru olmaqla büksəniz, baş barmağınız z oxunun müsbət istiqamətində yönələcək. O koordinat başlanğıcı

- Ox , Oy , Oz koordinat oxları
- Oxy , Oyz , Oxz koordinat müstəviləri adlanır.

Koordinat müstəviləri xy , yz , zx kimi də işarə edilir.

Fəzada nöqtənin koordinatları.

- 1) P nöqtəsindən keçən və Oyz müstəvisinə paralel olan müstəvi x oxunu $(x_0;0;0)$ nöqtəsində kəsir
- 2) P nöqtəsindən keçən və Oxz müstəvisinə paralel olan müstəvi y oxunu $(0;y_0;0)$ nöqtəsində kəsir.

•

3) P nöqtəsindən keçən və Oxy müstəvisinə paralel olan müstəvi z oxunu $(0;0; z_0)$ nöqtəsində kəsir.

Fəzanın hər bir P nöqtəsinə nizamlı $(x_0; y_0; z_0)$ üçlüyü uyğundur və tərsinə:

$P \leftrightarrow (x_0; y_0; z_0)$.

$(x_0; y_0; z_0)$ nizamlı üçlüyü düzbucaqlı (Oxyz) koordinat sistemində P

nöqtəsinin koordinatları, yaxud Dekart koordinatları adlanır.

P nöqtəsindən yz, zx və xy müstəvilərinə qədər məsafələr uyğun olaraq

onun x_0, y_0, z_0 koordinatlarının mütləq qiymətlərinə bərabərdir.

$x_0; y_0; z_0$ ədədlərinə P nöqtəsinin, uyğun olaraq absisi, ordinatı, applikatı

deyilir və nöqtə koordinatları ilə $P(x_0; y_0; z_0)$ kimi yazılır

Fəzada iki nöqtə arasındakı məsafə.

P (x_1, y_1, z_1) və Q (x_2, y_2, z_2) nöqtələri arasındakı məsafə

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ düsturu ilə hesablanır.

Parçanı müəyyən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları.

P $(x_1; y_1; z_1)$ və Q $(x_2; y_2; z_2)$ nöqtələrini birləşdirən parçanı.

$$PR : RQ = m : n$$

nisbətində bölən R nöqtəsinin koordinatları:

Parçanı müəyyən nisbətə bölən nöqtənin koordinatları.

$P(x_1; y_1; z_1)$ və $Q(x_2; y_2; z_2)$ nöqtələrini birləşdirən parçanı

$PR : RQ = m : n$ nisbətində bölən R nöqtəsinin koordinatları

$$R\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}; \frac{my_2 + ny_1}{m+n}; \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) \text{ kimi tapılır.}$$

İsbatı: PQ parçasını verilən nisbətə bölən nöqtə $R(x; y; z)$

olsun. P, R və Q nöqtələrindən xy müstəvisinə PL, RN və

QM perpendikulyarlarını, L, N, M nöqtələrindən isə Ox

oxuna LA, NC və MB perpendikulyarlarını çəkək. Şəklə

əsasən, $AC = OC - OA = x - x_1$ və

$BC = OB - OC = x_2 - x$ olduğundan, mütənasib parçalar

haqqındakı teoremə görə alırıq:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

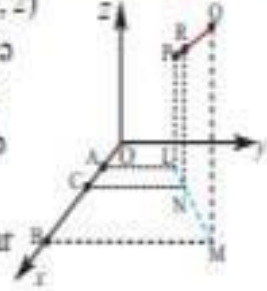
$$n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$(m+n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

Oxşar qayda ilə Oy və Oz oxlarına perpendikulyarlar çəkməklə y və z koordinatları müəyyən edilir.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

**Parçanın orta nöqtəsinin koordinatları.** $P(x_1; y_1; z_1)$ və $Q(x_2; y_2; z_2)$ nöq-

tələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsi $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ olur.

Üçbucağın ağırlıq mərkəzinin koordinatları.

Təpələri $M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$ və $L(x_3; y_3; z_3)$ nöqtələrində olan üçbucağın ağırlıq mərkəzinin (medianlarının kəsişmə nöqtəsinin) koordinatlarını

$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ kimi tapmaq olar (özünüz yoxlayın).

Fəzada vektorlar

Tərif: Təkcə qiyməti ilə deyil, həm də istiqaməti ilə müəyyən edilən kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər və ya vector deyilir.

Vektor istiqamətlənmiş düz xətt parçası ilə təsvir edilir.

Vektoru göstərən parçanın uzunluğuna vektorun uzunluğu və ya modulu deyilir.

Vektor bir ölçülü, ikiölçülü, üçölçülü koordinat sistemində təsvir edilə bilər.

Başlanğıc nöqtəsi ilə son nöqtəsi üst-üstə düşən vektora sıfır vector deyilir.

Sıfır vektorun istiqaməti qeyri-müəyyəndir.

Fəzada nöqtənin yerini (vəziyyətini, mövqeyini) müəyyən edən və başlanğıc nöqtə ilə verilən nöqtəni birləşdirən vektora **yer vektoru**, yaxud **radius-vektor** deyilir.

Fəzada verilmiş hər bir nöqtəyə bir yer vektoru uyğundur. Koordinat sistemində $P(a;b;c)$

Modulları bərabər, istiqamətləri eyni olan vektorlara **bərabər vektorlar** deyilir. Bərabər vektorları parallel köçürmə ilə tamamilə bir-birinin üzərinə gətirmək olar. OM yer vektoru ilə modulca bərabər və istiqamətcə eyni olan sonsuz sayda vektor çəkmək mümkündür.

Fəzada başlanğıcı $A(x_1; y_1; z_1)$, sonu $B(x_2; y_2; z_2)$ nöqtəsi olan AB vektoru komponentləri ilə $AB \square x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \square$ kimi yazılır. Bərabər vektorların uyğun komponentləri bərabərdir və tərsinə.

Modulları bərabər, istiqamətləri əks olan vektorlara **əks vektorlar** deyilir.

Vektorun uzunluğu: iki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə vektorun modulunu tapa bilərik.

Teorem: Başlanğıcı və sonu uyğun olaraq $P(x_1, y_1, z_1)$ və $Q(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri olan PQ vektorunun uzunluğu

$[PQ] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ düsturu ilə tapılır.

Vektorların toplanması və çıxılması: $\vec{v} = \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$ və $\vec{u} = \langle u_1; u_2; u_3 \rangle$ vektorlarının cəmi (fərqi), komponentləri bu vektorların uyğun komponentləri cəminə (fərqinə) bərabər olan vektordur:

$$\vec{v} + \vec{u} = \langle v_1 + u_1; v_2 + u_2; v_3 + u_3 \rangle$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \langle v_1 - u_1; v_2 - u_2; v_3 - u_3 \rangle$$

Vektorun ədədə vurulması: $\vec{v} = \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$ vektorunun k həqiqi ədədinə hasili $k\vec{v} = \langle kv_1; kv_2; kv_3 \rangle$ kimi təyin edilən vektordur. Vektorun həqiqi ədədə hasili üçün aşağıdakı cəbri qaydalar doğrudur:

- Hər bir $k \in \mathbb{R}$ üçün $k(u + v) = ku + kv$

- Hər bir $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ üçün $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$

- Hər bir $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ üçün $(k_1 \cdot k_2) \vec{u} = k_1(k_2 \cdot \vec{u})$

İki vektorun skalyar hasili.

Sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucaq onlara bərabər olmaqla eyni nöqtədən ayrılmış vektorlar arasındakı bucağa deyilir. Aydındır ki, iki vektor arasındakı θ bucağının qiyməti $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığındadır.

Sıfır olmayan iki a və b vektorunun skalyar hasili bu vektorların modulları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə deyilir və $a \cdot b$ kimi yazılır.

Skalyar hasilin xassələri:

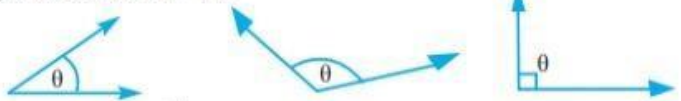
- Skalyar hasilin yerdəyişmə xassəsi. İstənilən a və b vektorları üçün $a \cdot b = b \cdot a$
- Skalyar hasilin qruplaşdırma xassəsi. İstənilən a və b vektorları və m həqiqi ədədi üçün $(ma) \cdot b = m(a \cdot b) = a \cdot (mb)$

- Skalyar hasilin paylama xassəsi: 1) İstənilən a, b vektorları və m həqiqi ədədi üçün $m(a + b) = ma + mb$
- 2) İstənilən a, b, c vektorları üçün $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ Xüsusi halda, ort vektorların skalyar hasilini üçün alırıq: $i \cdot i = 1, j \cdot j = 1, k \cdot k = 1, i \cdot j = 0, i \cdot k = 0, j \cdot k = 0$.

İki vektorun skalyar hasilı

İki vektor arasındakı bucaq

Sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucaq $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ münasibətindən tapılır, burada $0 \leq \theta \leq \pi$.



Nümunə. $\vec{a} = \langle -3; 4 \rangle$ və $\vec{b} = \langle 9; 12 \rangle$ vektorları arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

Həlli: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 9 + 4 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{-27 + 48}{5 \cdot 15} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$

Nəticə: Sıfır olmayan iki vektor yalnız skalyar hasilı sıfır olduqda perpendikulyardır: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Nümunə. k -nın hansı qiymətində $\vec{a} = \langle 3; 4 \rangle$ və $\vec{b} = \langle k; 12 \rangle$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır?

Həlli: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ olmalıdır: $3 \cdot k + 4 \cdot 12 = 0$, buradan $k = -16$ olduqda $\vec{a} \perp \vec{b}$

Düz xəttin ümumi tənliyi.

Müstəvi koordinat sistemində düz xəttin tənliyi $ax + by + c = 0$ şəklində ifadə edilir. Bu tənliyə **düz xəttin ümumi tənliyi** də deyilir.

Düz xəttə perpendikulyar olan vektor düz xəttin **normal vektoru** və ya **normalı** adlanır. Normalı $\langle a; b \rangle$ olan düz xəttin ümumi tənliyinin $ax + by + c = 0$ şəklində olduğunu göstərək. $P_0(x_0; y_0)$ düz xətt üzərində verilmiş nöqtə, $P(x; y)$ düz xətt üzərində P -dan fərqli ixtiyari nöqtə, $n \langle a; b \rangle$ isə düz xəttin normal vektoru olsun. $P_0P \langle x - x_0; y - y_0 \rangle$ və $n \langle a; b \rangle$ vektorları perpendikulyardır.

Onda $n \cdot P_0P = 0$.

Buradan $\langle a; b \rangle \cdot \langle x - x_0; y - y_0 \rangle = 0$,

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0,$$

$ax + by - by_0 - ax_0 = 0$ alarıq.

$-by_0 - ax_0 = c$ kimi işarə etsək, düz xəttin **$ax + by + c = 0$** ümumi tənliyini alarıq.

Xüsusi hallar:

- $a = 0, b \neq 0$. absis oxuna paralel düz xəttin tənliyi.
- $a \neq 0, b = 0$. ordinat oxuna paralel düz xəttin tənliyi
- $c = 0$. koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyi

Nümunə . $A(4; -2)$ nöqtəsindən keçən və normalı $n = \langle 5; 3 \rangle$ olan l düz xəttinin tənliyini yazın.

Həlli: Koordinat sistemində $n = \langle 5; 3 \rangle$ normal vektorunu qurub $A(4; -2)$ nöqtəsindən keçən və normal perpendikulyar düz xətti çəkərək məsələnin həllini qrafik təsvir edək. İndi isə tələb olunan tənliyi yazaq.

1-ci üsul. Tutaq ki, $P(x; y)$ nöqtəsi l düz xətti üzərində olan və verilən A nöqtəsindən fərqli nöqtədir. Onda AP vektoru l düz xəttinə kollineardır və $AP = \langle x - 4; y - (-2) \rangle = \langle x - 4; y + 2 \rangle$. n və AP vektorları perpendikulyar olduqlarından $n \cdot AP = 0$. Buradan $\langle 5; 3 \rangle \cdot \langle x - 4; y + 2 \rangle = 0$;

$$5(x - 4) + 3(y + 2) = 0; \quad 5x + 3y - 14 = 0 \text{ alarıq.}$$

2-ci üsul. $n = \langle 5; 3 \rangle$ normalına görə düz xəttin $ax + by + c = 0$ tənliyini $5x + 3y + c = 0$ kimi yazı bilərik. $A(4; -2)$ nöqtəsi bu düz xəttin üzərində olduğundan $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + c = 0$, $c = -14$ tapılır və düz xəttin tənliyi

$$5x + 3y - 14 = 0 \text{ olur}$$

Müstəvinin tənliyi

Müstəvi müxtəlif üsullarla müəyyən oluna bilər.

- kollinear olmayan üç nöqtə ilə
- düz xətt və ona aid olmayan nöqtə ilə
- iki kəsişən düz xətlə
- iki paralel düz xətlə
- bir nöqtə və bu nöqtədə verilən istiqamətdə çəkilmiş perpendikulyarla.

Müstəvini müəyyən etməyin yuxarıda göstərilən müxtəlif yolların sonuncusundan istifadə etməklə müstəvinin tənliyinin $ax + by + cz + d = 0$ şəklində olduğunu göstərək. Müstəviyə perpendikulyar vektora onun **normalı** deyilir.

Tutaq ki, müstəvisi və onun üzərində $P_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsi verilmişdir və $n(a; b; c)$ müstəviyə çəkilmiş normal vektordur. Müstəvi üzərində $P_0(x_0; y_0; z_0)$ -dan fərqli ixtiyari $P(x; y; z)$ nöqtəsi götürək. Müstəviyə perpendikulyar düz xətt müstəvi üzərindəki istənilən düz xəttə perpendikulyardır. Deməli, $n \cdot P_0P$ olacaq. Buradan $n \cdot P_0P = 0$ olduğunu yaz bilərik.

Nümunə 1. Normal vektoru $n(-1; 3; 4)$ olan müstəvi $A(1; 2; 3)$ nöqtəsindən keçir. Bu müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli: Tapşırığı iki üsulla həll etmək olar.

1-ci üsul. Müstəvi üzərində ixtiyari $P(x; y; z)$ nöqtəsi götürək və başlanğıcı $A(1; 2; 3)$, sonu $P(x; y; z)$ nöqtəsində olan vektoru komponentləri ilə yazaq:

$AP = (x - 1; y - 2; z - 3)$ Normal vector $n(-1; 3; 4)$ olduğuna görə $n \cdot AP = 0$ olar.

2-ci üsul. Müstəvinin tənliyinin $ax + by + cz + d = 0$ şəklində və onun Normalının isə $n = \langle a; b; c \rangle$ olduğunu bilirik. Deməli, $n = \langle -1; 3; 4 \rangle$ normalına görə $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$ olduğunu nəzərə alsaq, müstəvinin tənliyi $(-1)x + 3y + 4z + d = 0$ və ya $-x + 3y + 4z + d = 0$ olar. Bu tənlikdə müstəvi üzərində olan A nöqtəsinin $(1; 2; 3)$ koordinatlarını yerinə yazsaq, d parametrini tapa bilərik:

$$-x + 3y + 4z + d = 0,$$

$$-1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + d = 0; \quad d = -17.$$

Beləliklə, müstəvinin tənliyi $-x + 3y + 4z - 17 = 0$ və ya $x - 3y - 4z + 17 = 0$ olar.

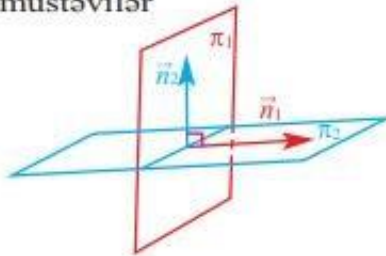
Müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti. Sferanın tənliyi.

Fəzada və müstəvidə çevrilmələr.

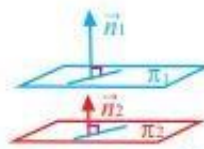
Əgər müstəvilər perpendikulyardırsa, onların normaları da perpendikulyardır və tərsinə: $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Əgər müstəvilər paraleldirsə, onların normaları da paraleldir və tərsinə: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

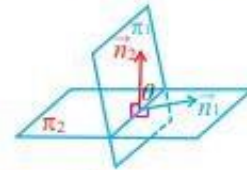
Perpendikulyar müstəvilər



Paralel müstəvilər



İki müstəvi arasındakı bucaq



Normalları $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ olan π_1 və π_2 müstəviləri arasındakı θ bucağı $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ münasibətini ödəyir.

Tərif. Verilmiş $P_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən r məsafədə olan bütün nöqtələr çoxluğuna **sfera** deyilir.

P_0 nöqtəsi **sferanın mərkəzi**, r isə **radius** adlanır.

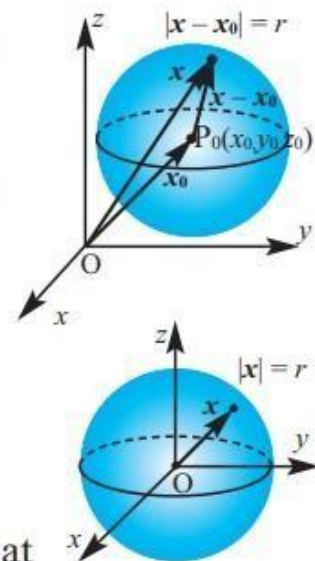
$P(x; y; z)$ sfera üzərində hər hansı nöqtə olarsa, iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə yazıla bilər:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Bu, mərkəzi P_0 və radiusu r olan sferanın tənliyidir.

Xüsusi halda, mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu r olan sferanın tənliyi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ olar.

Şəkildən göründüyü kimi, bu sferanın Oxy koordinat müstəvisi ilə kəsişməsi onun böyük çevrəsidir.



Fəzada və müstəvidə çevrilmələr.

Fəzada F fiqurunun hər bir P nöqtəsinə müəyyən bir qayda ilə fəzanın yeganə P' nöqtəsini qarşı qoyan uyğunluğa F fiqurunun çevrilməsi deyilir.

Nöqtələr arasındakı məsafəni saxlayan çevirməyə **hərəkət** deyilir.

Hərəkət müstəvinə müstəviyə, düz xətti düz xəttə, parçanı konqruent parçaya, bucağı konqruent bucağa çevirir. Deməli, hərəkətdə fiqur özünə konqruent fiqura çevrilir.

Paralel köçürmə. İkiölçülü koordinat sistemində hər bir $(x; y)$ nöqtəsinə $(x + a; y + b)$ nöqtəsini qarşı qoyan çevrilmənin $\langle a; b \rangle$ vektoru ilə icra olunan paralel köçürmə olduğunu bilirik.

Oxşar qayda ilə fəzada paralel köçürmədə hər bir nöqtənin koordinatları

$(x; y; z) \rightarrow (x + a; y + b; z + c)$ kimi dəyişir. Paralel köçürmə hərəkətdir. Hər bir paralel köçürməyə bir vektor uyğundu və tərsinə.

Simmetriya. Fəzada nöqtəyə və düz xəttə nəzərən simmetriya çevrilməsinə də müstəvidə olduğu kimi tərif verilir. Fəzada həm də müstəviyə nəzərən simmetriyaya baxılır.

Fəzada $(x; y; z)$ nöqtəsi ilə

- Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; -y; -z)$
- Ox oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; -y; -z)$ • Oy oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; y; -z)$
- Oz oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; -y; z)$
- Oxy müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; y; -z)$
- Oyz müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; y; z)$
- Oxz müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; -y; z)$

Dönmə. Fəzada fiqurun l düz xətti ətrafında θ bucağı qədər dönməsi elə çevrilməyə deyilir ki, bu zaman l düz xəttinə perpendikulyar olan hər bir müstəvidə onun l düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsi ətrafında eyni istiqamətdə eyni θ bucağı qədər dönmə baş verir. l düz xəttinə dönmə oxu, θ -ya isə dönmə bucağı deyilir.

Homotetiya. Fəzada da müstəvidə olduğu kimi oxşarlıq çevrilməsi anlayışı daxil edilir. Fiqurun çevrilməsində istənilən iki X və Y nöqtələr i arasındakı məsafə eyni $k > 0$ ədədi dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə oxşarlıq çevrilməsi, k ədədinə isə oxşarlıq əmsalı deyilir. F fiqurunun çevrilməsində istənilən X nöqtəsinin çevrildiği X' nöqtəsi üçün $OX' = k \cdot OX$ ödənərsə, bu çevrilməyə O mərkəzli və k əmsallı ($k \neq 0$) **homotetiya deyilir.** Homotetiya oxşarlıq çevrilməsidir. Xüsusi halda, $k = -1$ olduqda mərkəzi simmetriya, $k = 1$ olduqda eynilik çevrilməsi alınır.

3.Limit.

Funksiyanın nöqtədə limiti. Funksiyanın qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə limitin tapılması.

Limit anlayışı riyaziyyatın fundamental anlayışlarındanandır.

1. Dairənin sahəsi.

Dahi riyaziyyatçı və filosof Arximed dairənin sahəsini tapmaq üçün daxilə və xaricə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların sahəsindən istifadə etmişdir. Dairənin daxilinə çəkilmiş kvadratın sahəsi dairənin sahəsindən xeyli kiçikdir, lakin daxilə çəkilmiş səkkizbucaqlının sahəsi dairənin sahəsindən daha az fərqlənir. Dairənin daxilinə düzgün 16 bucaqlı, 32 bucaqlı və.s çəkilmiş olsa, bu çoxbucaqlının sahəsi dairənin sahəsinə daha da yaxın olar. Daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının tərəflərinin sayını sonsuz artırıbsaq, onun sahəsi dairənin sahəsinə sonsuz yaxınlaşar.

Dairənin xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının da tərəflərinin sayı artdıqca onun sahəsi ilə dairənin sahəsi arasındakı fərq kiçilir. Arximed bu yanaşması əslində limit konsepsiyasının əsasını təşkil edir.

Araşdırma.

Uzunluğu 24 m olan məftillə düzbucaqlı şəkildə sahə əhatə olunmalıdır. Onun ölçülərini necə seçmək lazımdır ki, sahəsi ən böyük olsun?

Həlli: Düzbucaqlının uzunluğunu a , enini b ilə işarə etsək, perimetri $P = 2a + 2b$ olar.

Şərtə görə $2a + 2b = 24$. Buradan $a = 12 - b$. $a = 12 - b$ olduğunu $S = ab$ sahə

düsturunda nəzərə alsaq, düzbucaqlının sahəsinin enindən asılılığını $S = (12 - b)b$ və ya $S(b) = 12b - b^2$ kimi yazmaq olar.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin hər hansı ətrafında (ola bilsin ki, a

nöqtəsindən başqa) təyin olunmuşdur. $x - a$ fərqi sıfıra yaxınlaşdıqda $f(x) - L$ fərqi

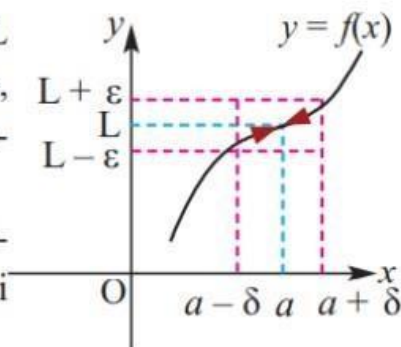
də sıfıra yaxınlaşarsa, L ədədinə $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir və

bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ kimi yazılır.

Tərif. Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $0 < |x - a| < \delta$ şərtini ödəyən x -lər üçün $|f(x) - L| < \varepsilon$ olur. Onda L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti deyilir və bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ kimi yazılır.

Bunu həndəsi olaraq qısaca belə izah etmək olar.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün ordinat oxu üzərində L nöqtəsinin $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ətrafını götürək və $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ nöqtələrindən absis oxuna paralel xətlər çəkək: eni 2ε olan zolaq alarıq. $f(x)$ funksiyasının $(a - \delta; a + \delta)$ ətrafında olan bütün x -lərə ($x \neq a$) uyğun qiymətləri $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ intervalında, qrafiki isə eni 2ε olan bu zolaqda yerləşəcək.



Limitin varlığı. Birtərəfli limitlər.

Bəzən x dəyişəninin a -ya yalnız bir tərəfdən (sağdan və ya soldan) yaxınlaşdığı hallara baxmaq lazım gəlir.

Sol limit. x -in qiymətləri a -dan kiçik qalmaqla a -ya yaxınlaşdıqda $f(x) - L$ fərqi sıfıra yaxınlaşsın, L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sol limiti deyilir və $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ kimi yazılır.

Sağ limit. x -in qiymətləri a -dan böyük qalmaqla a -ya yaxınlaşdıqda $f(x) - L$ fərqi sıfıra yaxınlaşsın, L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sağ limiti deyilir və $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ kimi yazılır.

$f(x)$ funksiyasının sağ və sol limitləri varsa və bərabədirsə,

onda $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti var və

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ bərabərliyi doğrudur.}$$

Funksiyanın limiti haqqında aşağıdakı təkliflər doğrudur.

• **$f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti varsa, yeganədir.**

Sabitin limiti.

$f(x) = c$ sabit funksiyası üçün $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$.

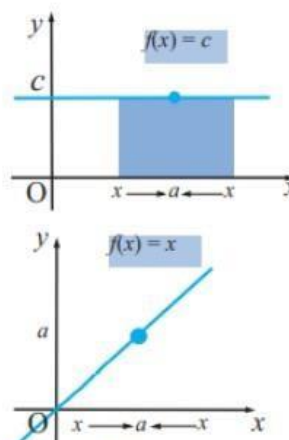
• **Sabitin limiti özünə bərabərdir.**

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7$, $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$

• **Eynilik funksiyasının limiti.**

$f(x) = x$ eynilik funksiyası üçün $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow -5} x = -5$



Funksiyanın limitini taparkən aşağıdakı xassələrdən istifadə edilir.

Əgər L, M, a həqiqi ədədlər və $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, olarsa, onda:

1. Cəmin limiti: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$

İki funksiyanın cəminin limiti onların limitləri cəminə bərabərdir.

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 6 = 3 + 6 = 9$

2. Fərqin limiti: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$

İki funksiyanın fərqinin limiti onların limitləri fərqiə bərabərdir.

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow -1} (11 - x) = \lim_{x \rightarrow -1} 11 - \lim_{x \rightarrow -1} x = 11 + 1 = 12$

3. Hasilin limiti: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

İki funksiyanın hasilinin limiti onların limitləri hasilinə bərabərdir.

Xüsusi halda alırıq ki, $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Yəni, sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow 5} (-2x) = (-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 5} x = -2 \cdot 5 = -10$

4. Nisbətin limiti: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

İki funksiyanın nisbətinin limiti, bölənin limiti sıfırdan fərqlidirsə, limitlərin nisbətinə bərabərdir.

Nümunə. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x + 5}{4 - x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5}{\lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x} = \frac{2 + 5}{4 - 2} = \frac{7}{2} = 3,5$

5. Qüvvətin limiti: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L^n, n \in \mathbb{N}$.

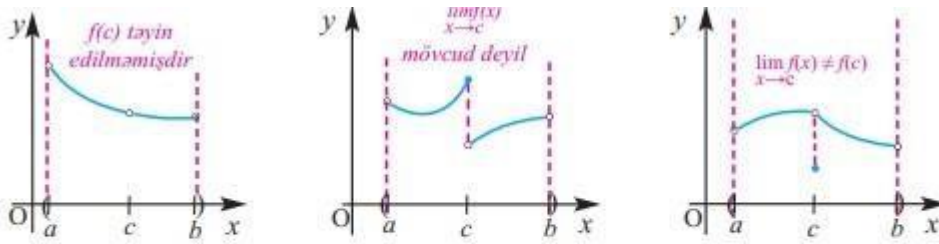
Xüsusi halda, $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

Nümunə. a) $\lim_{x \rightarrow 10} x^4 = 10^4 = 10000$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x^3} = \frac{2}{27}$

Funksiyanın kəsilməzliyi bir çox hallarda sadəcə olaraq aşağıdakı kimi izah edilir. Əgər hər hansı funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan çəkmək mümkündürsə, bu funksiya kəsilməz funksiyaadır. Əks halda qrafikin kəsilmə nöqtələri (sıçrayış nöqtələri) adlanan nöqtələri var və bu funksiya kəsiləndir. Kəsilən funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan bir dəfəyə çəkmək mümkün deyil.

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi. Funksiyanın nöqtədə kəsilməz olması üçün qrafik bu nöqtədə qırılmamalı, qrafikdə sıçrayış olmamalıdır. Qrafiki aşağıda verilmiş funksiyaların $x = c$ nöqtəsində ya qırılması, ya da sıçrayışı var. Deməli, bu funksiyalar $x = c$ nöqtəsində kəsiləndir. Bu halları nəzərdən keçirək.



Qrafiklərdən görüldüyü kimi, aşağıdakı hallarda funksiya $x = c$ nöqtəsində kəsilməz olur.

1. Funksiya $x = c$ nöqtəsində təyin olunmayıb, lakin onun müəyyən ətrafında təyin olunub.
2. $f(x)$ funksiyasının $x = c$ nöqtəsində limiti yoxdur.
3. $f(x)$ funksiyasının $x = c$ nöqtəsində limiti var, lakin $f(c)$ -yə bərabər deyil.

Funksiya qrafikinə kəsildiyi nöqtənin absisinə **kəsilmə nöqtəsi** deyilir.

Yuxarıda göstərilən şərtlərdən heç biri ödənilmədikdə funksiyanın $x = c$ nöqtəsində kəsilməz olduğunu demək olar.

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi. f funksiyasının c nöqtəsində kəsilməz olması üçün aşağıdakı üç şərt ödənməlidir:

1. Funksiya $x = c$ nöqtəsində təyin olunmalıdır;
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ limiti olmalıdır;
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ bərabərliyi ödənməlidir.

Tərif. : $(a; b)$ intervalının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan funksiya bu intervalda kəsilməz funksiya deyilir.

İstənilən çoxhədli funksiya bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. Rəşional funksiya məxrəcin 0-dan fərqli olduğu bütün nöqtələrdə kəsilməzdir. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = ax$ funksiyaları bütün həqiqi oxda, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \log_a x$ funksiyaları təyin oblastlarında kəsilməzdir.

Trigonometrik funksiyların limiti

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$$

a ədədi trigonometrik funksiyanın təyin oblastına daxildir.

Nümunələr: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$

Birinci görkəmli limit

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində limiti var və bu limit 1-ə bərabərdir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

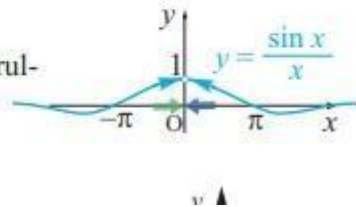
x -in həqiqi ədəd və ya bucağın radian ölçüsü olduğunu nəzərə alaraq, $x \rightarrow 0^+$ şərtində tərtib edilmiş qiymətlər cədvəlinə görə $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyanın qiymətinin 1-ə yaxınlaşdığını təxmin etmək olar.

$x \rightarrow 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99833416	0,99998333	0,99999983	0,99999999

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$, yəni verilmiş funksiya cüt funksiya olduğundan $x \rightarrow 0^-$ şərtində də $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ olur.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyanın qrafikalkulyatorla qurulmuş qrafikindən də görünür ki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Sonsuz limitlər və sonsuzluqdz limit.

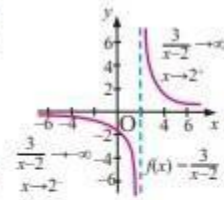
Şaquli və üfiqi asimptotlar.

Ədədi ardıcılığın limiti.

Nümunə. Şəkilə verilmiş $f(x) = \frac{3}{x-2}$ funksiyasının qrafikindən də görüldüyü kimi, x -in qiyməti 2-yə sağdan yaxınlaşdıqca y -in qiyməti **sonsuz böyüyür**. Yəni

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

x -in qiyməti 2-yə soldan yaxınlaşdıqca y -in qiyməti **mənfi olmaqla modulca sonsuz böyüyür**. Yəni $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$



Sol və sağ limitlər müxtəlifdir, verilən funksiyanın $x = 2$ nöqtəsində limiti yoxdur.

Şəkilə qrafiki verilən $f(x)$ funksiyası isə həqiqi ədədlər çoxluğunun

a ədədinin müəyyən ətrafında, a

ədəmindən başqa, bütün qiymətlərdə

təyin olunmuşdur və $x \rightarrow a$ olduqda

$f(x) \rightarrow \infty$. Bu, limitlə

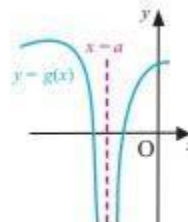
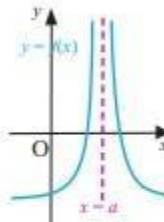
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ kimi yazılır.

Oxşar yanaşma ilə $g(x)$ funksiyası

üçün də $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

limiti funksiyanın sonsuz dəyişdiyini göstərir. Funksiyanın sonsuz dəyişməsinə

limitin köməyi ilə aşağıdakı 6 hal ilə ifadə etmək olar.



Şaquli asimptot.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$$

münasibətlərindən hər hansı biri ödənərsə, $x = a$ düz xətti $f(x)$ funksiyasının **şaquli asimptotudur**.

Teorem. $x \rightarrow \pm\infty$ olduqda $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ funksiyası özünü çoxhədlinin baş həddi kimi aparır, başqa sözlə,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$

Analoji olaraq, rasionel funksiyanın iki çoxhədlinin nisbəti olduğunu nəzərə alsaq, rasionel funksiyanın limiti üçün alırıq:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + \text{daha kiçik dər. hədlər}}{bx^m + \text{daha kiçik dər. hədlər}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

Burada $a \neq 0$ və $b \neq 0$

4. Fırlanma fiqurları. Silindr, konus, kürə

Fırlanma fiqurları .

Silindir və onun səthinin sahəsi.

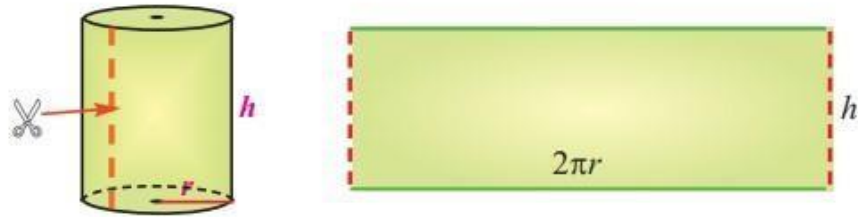
Müstəvi fiqurun (əyrinin verilən aralıqda əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin) müəyyən ox ətrafında bir tam dövr fırlanmasından müxtəlif fəza fiqurları alınır. Bu oxa **fırlanma oxu** deyilir. Silindr, konus, kürə bu cür fırlanmadan alınan sadə fəza fiqurlarıdır. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın kateti ətrafında fırlanmasından konus, düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından silindr, yarım dairənin diametri ətrafında fırlanmasından isə kürə yaranır.

İctimai binaların, otellərin, xəstəxanaların girişindəki fırlanan şüşə qapılar fırlanma fiqurlarının necə alındığını təsəvvür etmək üçün əyani nümunədir. Qapının düzbucaqlı layı tərpənməz dayaq ətrafında fırlanaraq silindr cızmış olur.

Paralel müstəvilər üzərində yerləşən və paralel köçürmədə üst-üstə düşən iki konqruent müstəvi fiqur və onların uyğun nöqtələrini birləşdirən bütün parçaların yaratdığı fəza fiquruna **silindr** deyilir. Bu müstəvi fiqurlar silindrin **oturacaqları**, onların uyğun nöqtələrini birləşdirən parçalar isə silindrin **doğuranı** adlanır. Doğuranı oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan silindrə düz silindr, əks halda mail silindr deyilir. Oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə silindrin **hündürlüyü** deyilir. Oturacağı dairə olan düz silindrə **düz dairəvi silindr** deyilir.

Düz dairəvi silindrə həm də düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiquru kimi baxmaq olar. Düz dairəvi silindrin doğuranı hündürlüyünə bərabərdir. Oturacağındakı dairənin radiusuna **silindrin radiusu** deyilir.

Hündürlüyü h , radiusu r olan silindrin yan səthinə ölçüləri $2\pi r$ və h olan düzbucaqlının r radiuslu çevrənin ətrafına bükülməsi kimi baxmaq olar.



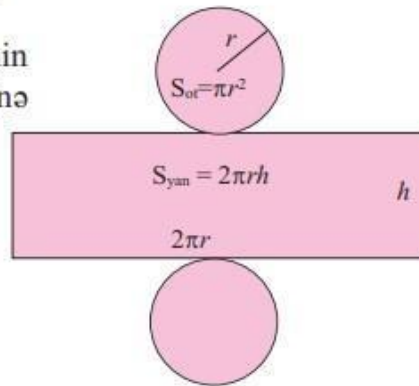
Silindrin **yan səthinin sahəsi** oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:

$$S_{\text{yan}} = 2\pi rh$$

Silindrin **tam səthinin sahəsi** yan səthinin sahəsi ilə oturacaqları sahələrinin cəminə bərabərdir:

$$S_{\text{tam}} = S_{\text{yan}} + 2S_{\text{ot}}$$

$$S_{\text{tam}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$



Konus və onun səthinin sahəsi.

Konusun səthi onun yan səthindən və oturacaq dairəsindən ibarətdir.

Tərif: Konusun yan səthinin sahəsi oturacaq çevrəsinin uzunluğunun yarısı ilə doğuranı hasilinə bərabərdir.

Konusun tam səthinin sahəsi:

$$S_{\text{tam}} = S_{\text{yan}} + S_{\text{ot}} = \pi r L + \pi r^2 = \pi r(l+r)$$

$$S_{\text{tam}} = \pi r L + \pi r^2 \quad \text{və ya} \quad S_{\text{tam}} = \pi r(l+r) \text{ düsturu ilə hesablanır.}$$

5.Funksiyanın törəməsi

Dəyişmənin orta sürəti,dəyişmənin ani sürəti.

Orta sürət. Şəkildə avtomobilin magistral yolda bərabərsürətli hərəkətdə və şəhər daxilində dəyişənsürətli hərəkətdə qət etdiyi yolun zamandan asılılıq qrafikləri verilmişdir. Bərabərsürətli hərəkətdə, bərabər zaman aralıqlarında gedilən yollar eyni uzunluqdadır və hərəkəti qrafik təsvir edən düz xəttin bucaq əmsalı sürəti göstərir. Dəyişənsürətli hərəkətdə isə avtomobilin bərabər zaman intervalllarında getdiyi yollar eyni uzunluqda olmaya bilər. Bu halda orta sürətin qiymətindən istifadə edilir.

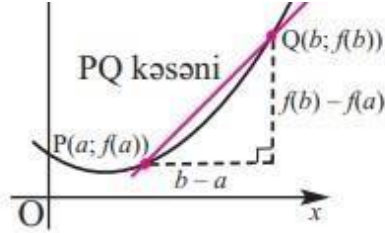


Cismin müəyyən zaman müddətində getdiyi yolun bu müddətə olan nisbətinə **orta sürət** deyilir:

$$v_{or} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$f(x)$ funksiyasının $a \leq x \leq b$ aralığında orta dəyişmə sürəti $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ kimi tapılır.

Bu nisbət $f(x)$ funksiyasının qrafikinin $(a; f(a))$ və $(b; f(b))$ nöqtələrindən keçən kəsənin bucaq əmsalına bərabərdir.



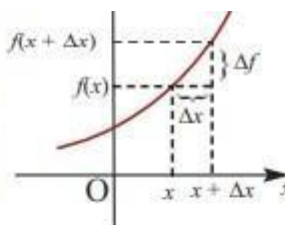
$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ limiti f funksiyasının $x = a$ nöqtəsində ani dəyişmə sürətini ifadə edir.

S nöqtəsi əyri üzrə T nöqtəsinə yaxınlaşdıqda TS kəsənin limit vəziyyətinə (əgər limit varsa) T nöqtəsində əyriyə çəkilən **toxunan** deyilir. $\Delta x \rightarrow 0$ olduqda kəsənin bucaq əmsalının limiti, yəni $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində ani dəyişmə sürəti funksiyanın qrafikinə T ($a; f(a)$) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Funksiyanın törəməsi.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a; b)$ intervalında təyin olunmuşdur. Hər hansı $x \in (a; b)$ nöqtəsini qeyd edək və argumentə elə Δx artımı verək ki, $x + \Delta x \in (a; b)$ olsun. Onda funksiya uyğun $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ artımı alar.



Tərif: Argument artımı sıfıra yaxınlaşdıqda funksiya artımının argument artımına nisbətinin sonlu limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi deyilir və belə yazılır:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f funksiyasının törəməsi yeni bir funksiya və $f'(x)$ ilə yanaşı $\frac{df}{dx}$ (Leybnis yazılışı) kimi də işarə edilir.

Əgər x nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi varsa, bu halda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası bu nöqtədə **diferensiallanandır**. Verilmiş intervalın hər bir nöqtəsində diferensiallanan funksiya həmin intervalda diferensiallanan funksiya deyilir.

Funksiyanın törəməsinin tapılmasına **diferensiallama əməli** deyilir.

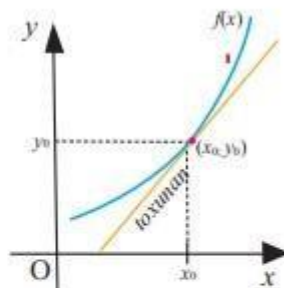
Törəməni tərifə görə tapmaq üçün aşağıdakı addımlar yerinə yetirilir.

1. $f(x + \Delta x)$ tapılır.
2. $f(x + \Delta x) - f(x)$ fərqi sadələşdirilir.
3. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nisbəti yazılır və sadələşdirilir.

Törəmənin həndəsi mənası. Toxunanın tənliyi.

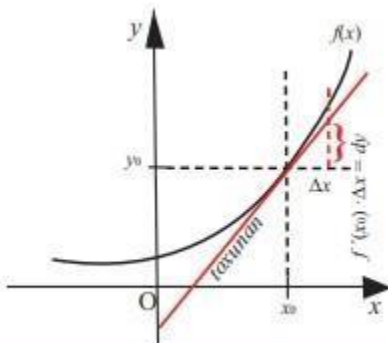
$y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanırsa, onun qrafikinə $(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində toxunan çəkmək olar.

Funksiyanın törəməsinin x_0 nöqtəsindəki qiyməti absisi x_0 olan nöqtədə qrafikə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir: $k_{\text{tox}} = f'(x_0)$.



$(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k olan düz xəttin tənliyi $y - y_0 = k(x - x_0)$ şəklindədir. Absisi x_0 olan nöqtənin ordinatının $y_0 = f(x_0)$, toxunanın bucaq əmsalının $k = f'(x_0)$ olduğunu nəzərə alsaq, $f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi x_0 olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyi $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ olar.

$f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifadəsinə funksiyanın diferensialı deyilir və dy ilə işarə olunur. Göründüyü kimi, diferensial Δx -dən asılı funksiyadır. $y = x$ funksiyası üçün $x' = 1$ olduğundan $dx = \Delta x$ alarıq. Ona görə $f(x)$ funksiyasının diferensialını $df = f'(x) dx$ kimi işarə edilir. Diferensial funksiyanın artımının baş (əsas) hissəsidir və $\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$.



Diferensiallama qaydaları.

Sabitin törəməsi	$C' = 0$
Qüvvət funksiyasının törəməsi	$(x^n)' = n x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$
Sabitlə funksiya hasilinin törəməsi	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Cəmin (fərqin) törəməsi	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

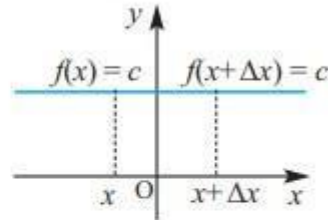
Törəmənin tərifindən istifadə edərək, bu qaydaları isbat edək.

1. $f(x) = c$ olarsa, $f'(x) = 0$, yəni sabitin törəməsi sıfıra bərabərdir.

İsbatı:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Sabit funksiyanın qrafikindən də göründüyü kimi, qrafikin bütün nöqtələrində bucaq əmsalının qiyməti sıfırdır.



2. $n \in \mathbb{N}$ və $f(x) = x^n$ olarsa, $f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = x^n$ funksiyanın $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ qiymətinə uyğun binomial açılışları yazaq. $(x+\Delta x)^1 = x+\Delta x$

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$(x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 4x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

Göründüyü kimi, hər bir açılışda birinci hədd x^n , ikinci hədd isə $n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$ kimidir, üçbucaqşəkilli rəngli hissədəki hədlərin hər birində $(\Delta x)^2$ vuruğu vardır. $(x+\Delta x)^n$ binomunun açılışını sadəlik üçün aşağıdakı kimi yazaq.

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n$$

Funksiyanın ani dəyişmə sürətini göstərən nisbəti yazaq və sadələşdirək:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x (nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n)}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n$$

Bu ifadənin $\Delta x \rightarrow 0$ şərtilə limiti $f(x)$ funksiyanın törəməsidir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n) = nx^{n-1}$$

Deməli, istənilən natural n ədədi üçün

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Xüsusi halda, $n = 1, 2, 3$ olduqda $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

Ümumiyyətlə, istənilən həqiqi üstlü qüvvət funksiyası üçün $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$ düsturu sağ tərəfin mənalı olduğu x -lər üçün doğrudur.

Xüsusi halda: $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

Nümunə 1. Funksiyaların törəməsini tapın:

a) $y = x^4$; b) $y = \frac{1}{x^5}$; c) $y = \sqrt[4]{x}$;

Həlli: a) $y' = (x^4)' = 4x^3$;

b) $y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -\frac{5}{x^6}$;

c) $y' = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

3. $f(x)$ diferensiallanan funksiya olduqda, istənilən c sabiti üçün

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),$$

yəni sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Doğrudan da

$$[c \cdot f(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c f(x + \Delta x) - c f(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

4. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallandırsa, onların cəmi (fərqi) də diferensiallandır və

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

İsbatı. Düsturun doğruluğunu $h(x) = f(x) + g(x)$ funksiyası üçün göstərək:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Hasilin və nisbətin törəməsi.

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallananırsa, onların hasili də diferensiallananıdır və $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

İsbatı: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ olsun.

İsbatı: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) g(x + \Delta x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ & \quad \text{Kəsrin surətinə } f(x + \Delta x) \cdot g(x) \text{ həddini əlavə edib,} \\ & \quad \text{çıxmaqla kəsri } f(x) \text{ və } g(x) \text{ hədlərinin daxili} \\ & \quad \text{olduğu iki kəsirin cəmi şəklində yazmaq olar.} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) g(x) + f(x + \Delta x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= f(x) g'(x) + f'(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x). \end{aligned}$$

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallanandırsa və $g(x) \neq 0$ olarsa,

onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbəti də diferensiallanandır və

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

İsbatı:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+\Delta x)} \right] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2} g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

Xüsusi halda, $\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = - \frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

Beləliklə alırıq ki, $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$u = g(x)$, $y = f(u)$ olduğunu nəzərə almaqla sonuncu bərabərliyin Leybnis yazılışı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ şəklində olar.}$$

Xüsusi halda, $g(f(x)) = (f(x))^n$ olarsa,

$$((f(x))^n)' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$f(x) = kx + b$ olduqda, alarıq: $((kx + b)^n)' = n \cdot (kx + b)^{n-1} \cdot k$

İkinci tərtib törəmə. Gedilən yol, sürət, təcil.

Tutaq ki, verilmiş aralıqda $y = f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi var. Əgər $f'(x)$ funksiyası diferensiallanandırırsa, onun törəməsinə $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsi deyilir və $f''(x)$ kimi işarə edilir.

Məlumdur ki, törəmə ani dəyişməni göstərir. Gedilən yolun zamana görə ani dəyişməsi sürətdir. Buradan törəmənin fiziki mənası aydın olur.

$s(t)$ qanunu ilə düzxətli hərəkətdə ani sürət $s(t)$ funksiyasının törəməsinə bərabərdir:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Sürət özü də zamandan asılı dəyişə bilər. Sürətin dəyişməsi isə təcil adlanan yeni bir kəmiyyətlə ifadə edilir. Ümumiyyətlə, gedilən yolun zamandan asılı funksiyasının törəməsini tapmaqla sürət funksiyası, yenidən sürət funksiyasının törəməsini tapmaqla təcil tapılır. Yəni, gedilən yolu göstərən funksiyanın ardıcıl olaraq iki dəfə törəməsini almaqla təcili tapmaq olar:

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

Fizikadan məlumdur ki, həm sürət, həm də təcil vektorial kəmiyyətdir. Təcil və sürət eyni işarəli olarsa, hərəkət yeyinləşən, əks işarəli olarsa, yavaşdır.

İkinci tərtib törəmədən bir çox iqtisadi məsələlərin, həmçinin real həyatı situasiyalara aid məsələlərin həllində istifadə edilir. Dəyişmə sürətinin müsbət və ya mənfi olduğunun təxmin edilməsi mühüm praktik əhəmiyyət kəsb edir.

Üstlü funksiyanın törəməsi.

Üstlü funksiya ədəd oxunun hər bir nöqtəsində diferensiallanandır.

1. $y = e^x$ funksiyanın törəməsi: $(e^x)' = e^x$

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} && \text{törəmənin tərifı} \\ & && e^x \text{ vuruğu mötərizə xaricinə çıxarılır} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} && e^x \text{ vuruğu } h\text{-dan asılı olmadığından} \\ & && \text{limit işarəsinin qarşısına çıxarılır.} \\ &= e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} && \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ nəzərə alınır.} \\ &= e^x\end{aligned}$$

2. $y = e^{u(x)}$ mürəkkəb funksiyanın törəməsi.

$u(x)$ diferensiallanan funksiya olarsa, $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Xüsusi halda, $(e^{kx+b})' = k \cdot e^{kx+b}$

3. $y = a^x$ funksiyanın törəməsi: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$$\begin{aligned}y' &= (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \text{loqarifmin əsas xassəsi} \\ &= e^{x \ln a} \ln a = \text{mürəkkəb funksiyanın törəməsi} \\ &= a^x \cdot \ln a \quad \text{loqarifmin əsas xassəsi}\end{aligned}$$

4. $y = a^{u(x)}$ mürəkkəb funksiyanın törəməsi.

$u(x)$ diferensiallanan funksiya olarsa, $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$

Loqarifmik funksiyanın törəməsi

Loqarifmik funksiyanın törəməsi

$y = \ln x$ funksiyası $(0; +\infty)$ aralığında diferensiallanandır və $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

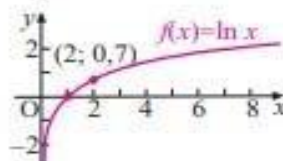
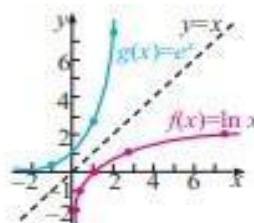
$e^y = x$ *ekvivalent yazılışla əvəz edilir*

$(e^y)' = (x)'$ *törəməsi alınır*

$(e^y) y' = 1$ *mürəkkəb funksiyanın törəməsi nəzərə alınır*

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad \text{əvəzetmə aparılır}$$

$$y' = \frac{1}{x}, \text{ yəni } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$



$y = \ln x$ funksiyanın törəməsini həndəsi olaraq belə təqdim etmək olar. Qrafik üzərində soldan başlayaraq hər hansı nöqtədə toxunan çəkin. Bu toxunan üzərində xətkəş yerləşdirin və xətkəşlə toxunanın sağa doğru yerdəyişməsini modelləşdirin. Hər növbəti toxunan xətkəşin bir qədər də üfüqi vəziyyətə gətirilməsini tələb edir və bucaq əmsalının qiyməti 0-a yaxınlaşır.

$u(x) > 0$ və diferensiallanan funksiya varsa, $(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Xüsusi halda, $(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}$

Nümunə. a) $y = \ln 5x$; b) $y = \ln(x^3 + 2)$ funksiyanın törəməsini tapın.

Həlli: a) $y' = (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

$$b) y' = (\ln(x^3 + 2))' = \frac{1}{x^3 + 2} \cdot (x^3 + 2)' = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

$y = \log_a x$ funksiyanın törəməsi: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Doğrudan da, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ olduğundan

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \text{alınır.}$$

törəməsi alınır

diferensiallama qaydası tətbiq edilir

$u(x) > 0$ və diferensiallanan funksiya varsa, $(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$

Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Triqonometrik funksiyalar təyin oblastında diferensiallanandır.

$y = \sin x$ funksiyasının törəməsi: $(\sin x)' = \cos x$

$$\begin{aligned} y' = (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} && \text{Törəmənin tərifinə görə} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = && \text{triqonometrik eynilik} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = && \text{ortaq vuruğun mötərizə} \\ &&& \text{xaricinə çıxarılması} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right] = && \text{kəsrin xassəsi} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = && \text{limitin xassəsi} \\ &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = && \begin{array}{l} \sin x \text{ və } \cos x, \Delta x\text{-dən asılı} \\ \text{olmadığı üçün} \end{array} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \\ \text{olduğu nəzərə alınır.} \end{array} \end{aligned}$$

$y = \sin u(x)$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi:

$u(x)$ diferensiallanan funksiyadırsa, $(\sin u(x))' = u'(x) \cdot \cos u(x)$

Xüsusi halda, $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx + b)$

Nümunə. $y = \sin 2x$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: Burada, $u = 2x$, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$

$y = \cos x$ funksiyasının törəməsi: $(\cos x)' = -\sin x$